



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Svingningsteori, Bind. 2

ikke-lineær svingningsteori

Nielsen, Søren R.K.

Publication date:
1990

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):

Nielsen, S. R. K. (1990). *Svingningsteori, Bind. 2: ikke-lineær svingningsteori*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitetscenter. U/ Bind 2 Nr. 9005

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy

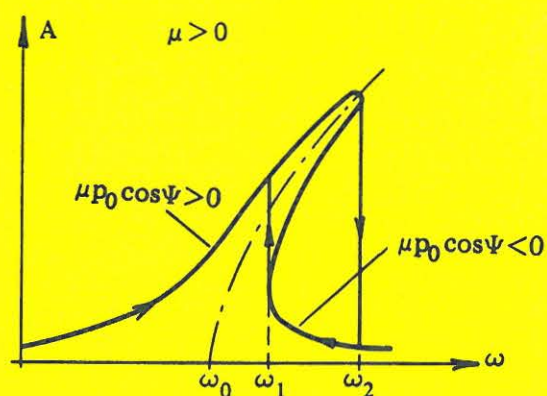
If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

6725

SVINGNINGSTEORI, BIND 2

Ikke-lineær svingningsteori

Søren R. K. Nielsen



Aalborg tekniske Universitetsforlag

FORORD

Nærværende lærebog i ikke-lineær svingningsteori er skrevet med henblik på undervisningen i bygningsdynamik på konstruktionsliniens 9. semester på Aalborg Universitetscenter. Bogens indhold er i det store og hele identisk med et sæt noter, jeg udarbejdede i efterårssemestret 1987 i forbindelse med forelæsningsne. Adjunkt, Ph.D. Kim J. Mørk har gennemlæst det færdige manuskript, og han har foreslået flere forbedringer. Renskrivningen er foretaget af overassistent Kirsten Aakjær, assistent Solveig Hesselvang og assistent Lene Sørensen, mens tegningerne er udført af teknisk assistent Norma Hornung. Alle takkes for veludført arbejde. Endelig takkes Aalborgs tekniske Universitetsforlag for det gode samarbejde ved bogens udgivelse.

Aalborg Universitetscenter, juni 1990.

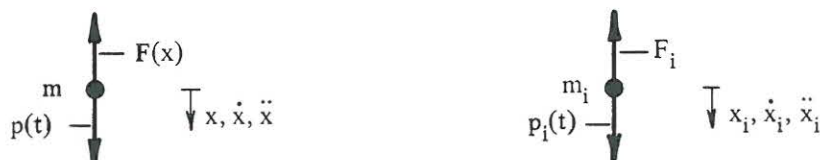
Søren R. K. Nielsen

INDHOLDSFORTEGNELSE

1. Bevægelsesligninger for systemer af 1 og n frihedsgrader	1
1.1 Klassifikation af ikke-lineariteter. Konservative og ikke-konservative kræfter.	10
1.2 Hysteresemodeller.	13
1.3 Referencer.	19
2. Kvalitative metoder	20
2.1 Grundlæggende begreber i stabilitetsteori.	20
2.2 Infinitesimal stabilitet af ligevægtspunkter i autonome systemer.	28
2.3 Egensvingninger af konservative systemer. Bevægelser i det store.	41
2.4 Periodiske bevægelser. Infinitesimal stabilitet.	45
2.5 Liapunov's direkte metode.	55
2.6 Referencer.	61
3. Kvantitative metoder	62
3.1 Grundlæggende perturbationsteknik.	62
3.2 Sekulære led. Lindstedt's metode.	65
3.3 Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky's metode.	74
3.4 Tvungne svingninger af kvasi-harmoniske systemer. Hopfænomener.	83
3.5 Subharmonisk og kombinationsharmonisk gensvar.	91
3.6 Systemer med tidsvarierende koefficienter. Mathieu's ligning.	101
3.7 Referencer.	114
4. Emneliste	115
5. Supplerende litteratur	118

1. BEVÆGELSESLIGNINGER FOR SYSTEMER AF 1 OG n FRIHEDSGRADER

Ikke-lineær svingningsteori omhandler analyse af ikke-lineære svingningsligninger. Disse ligninger opstår, når den ydre belastning, eller når de indre tilbageføringskræfter afhænger ikke-lineært af tilstandsvariablerne.



Figur 1.1. Systemer af 1 og n frihedsgrader.

Bevægelsesligninger opstilles ved at friskære systemets masser m_i , idet ydre kræfter p_i og indre tilbageføringskræfter F_i påføres som belastninger. Den ydre kraft regnes positiv i samme retning som den korresponderende frihedsgrad x_i , mens tilbageføringskraften regnes positiv i modsat retning. Newtons 2. lov for de fritskårne masser giver nu for henholdsvis et system af 1 og n frihedsgrader

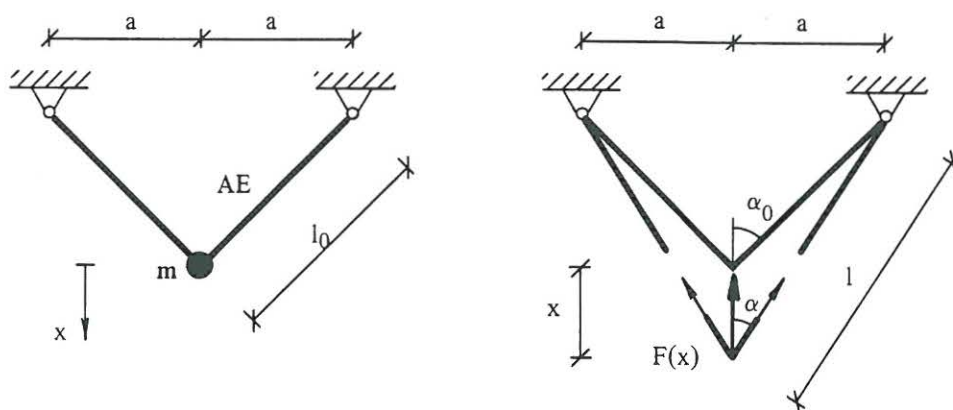
$$m \ddot{x} = p(t) - F(x) \Rightarrow$$

$$m \ddot{x} + F(x) = p(t) \quad (1-1)$$

$$m_i \ddot{x}_i = p_i(t) - F_i \Rightarrow$$

$$m_i \ddot{x}_i + F_i = p_i(t) \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (1-2)$$

Eksempel 1.1: Opstilling af bevægelsesligningen for et simpelt geometrisk ikke-lineært system af 1 frihedsgrad.



Figur 1.2. Ikke-lineært system af 1 frihedsgrad.

Stængerne i figur 1.2 antages masseløse og lineært elastiske med udeformeret længde l_0 . Under bevægelsen ændres længden til l . Med de på figuren definerede symboler bliver tilbageføringskraften

$$\begin{aligned} F(x) &= 2 \cos \alpha AE \epsilon = 2 \cos \alpha AE \frac{l - l_0}{l_0} \\ &= 2 \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{l} AE \frac{l - l_0}{l_0} = 2 \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{l_0} \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) AE \end{aligned} \quad (1-3)$$

Nu er

$$\begin{aligned} \sqrt{l^2 - a^2} &= \sqrt{l_0^2 - a^2} + x \Rightarrow \\ l^2 &= l_0^2 + 2 \sqrt{l_0^2 - a^2} x + x^2 \end{aligned} \quad (1-4)$$

Ved indsætning af (1-4) i (1-3) findes

$$\begin{aligned} F(x) &= 2 \frac{\sqrt{l_0^2 - a^2} + x}{l_0} \left(1 - \frac{l_0}{(l_0^2 + 2 \sqrt{l_0^2 - a^2} x + x^2)^{1/2}}\right) AE \\ &= 2 \left(\cos \alpha_0 + \frac{x}{l_0}\right) \left(1 - \frac{1}{(1 + 2 \cos \alpha_0 \frac{x}{l_0} + \frac{x^2}{l_0^2})^{1/2}}\right) AE \end{aligned} \quad (1-5)$$

hvor $\cos \alpha_0 = \sqrt{l_0^2 - a^2}/l_0$ betegner $\cos \alpha$ for $x = 0$. Ved anvendelse af Maclaurinrækken $\frac{1}{(1+x)^{1/2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$, findes følgende Maclaurinrække for $F(x)$:

$$\begin{aligned} F(x) &= 2 \left(\cos \alpha_0 + \frac{x}{l_0}\right) \left(\frac{1}{2} \left(2 \cos \alpha_0 \frac{x}{l_0} + \frac{x^2}{l_0^2}\right) - \frac{3}{8} \left(2 \cos \alpha_0 \frac{x}{l_0} + \frac{x^2}{l_0^2}\right)^2 + \frac{5}{16} \left(2 \cos \alpha_0 \frac{x}{l_0} + \frac{x^2}{l_0^2}\right)^3 + o\left(\frac{x^3}{l_0^3}\right)\right) AE \\ &= k \left(1 + \mu_1 x + \mu_2 x^2\right) x + o\left(\frac{x^2}{l_0} AE\right) \end{aligned} \quad (1-6)$$

$$k = 2 \cos^2 \alpha_0 \frac{AE}{l_0} \quad (1-6a)$$

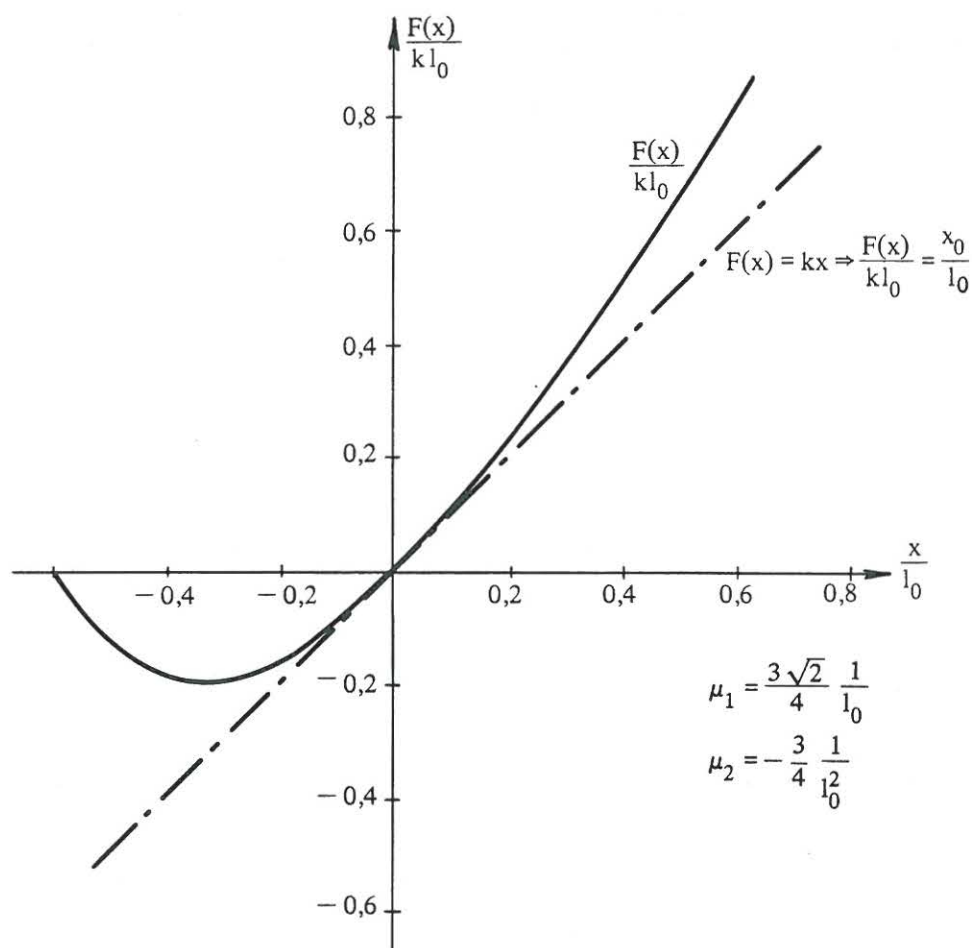
$$\mu_1 k = 3 \cos \alpha_0 (1 - \cos^2 \alpha_0) \frac{AE}{l_0^2} \Rightarrow$$

$$\mu_1 = \frac{3}{2} \frac{1 - \cos^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0} \frac{1}{l_0} \quad (1-6b)$$

$$\mu_2 k = (5 \cos^4 \alpha_0 - 6 \cos^2 \alpha_0 + 1) \frac{AE}{l_0^3} \Rightarrow$$

$$\mu_2 = \frac{5 \cos^4 \alpha_0 - 6 \cos^2 \alpha_0 + 1}{2 \cos^2 \alpha_0} \frac{1}{l_0^2} \quad (1-6c)$$

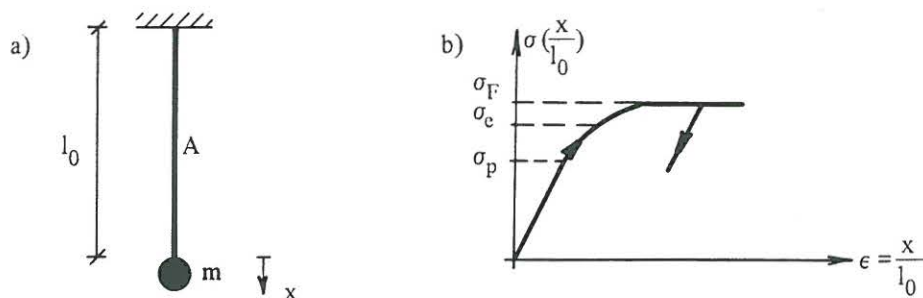
Restleddet $o(g(x))$ har egenskaben $\frac{o(g(x))}{g(x)} \rightarrow 0$ for $g(x) \rightarrow 0$.



Figur 1.3. Tilbageføringskraft (1-6) som funktion af $\frac{x}{l_0}$, $\cos \alpha_0 = \frac{\pi}{4}$.

En fortolkning af tilbageføringskraften vil blive foretaget senere i dette kapitel.

Eksempel 1.2: Fysisk ikke-lineær stång.



Figur 1.4. a) System af 1 frihedsgrad. b) Ikke-lineær trækarbejdscurve.

Figur 1.4 viser en fast indspændt stång af udeformeret længde l_0 , hvis samlede masse er ignorabel i forhold til enkeltmassen m placeret i den frie ende. Stålet har den i figur 1.4 b viste arbejdscurve, der antages ens i træk og tryk. σ_p er proportionalitetsgrænsen, σ_e er elasticitetsgrænsen, og σ_F er flydespændingen, hvor $\sigma_p < \sigma_e < \sigma_F$. Materialet er elastisk for $-\sigma_e \leq \sigma \leq \sigma_e$, dvs. stangen optager sin oprindelige længde l_0 ved aflastning, og lineært elastisk for $-\sigma_p \leq \sigma \leq \sigma_p$. Ved påvirkninger under elasticitetsgrænsen bliver tilbageføringskraften

$$F(x) = \sigma \left(\frac{x}{l_0} \right) A \quad (1-7)$$

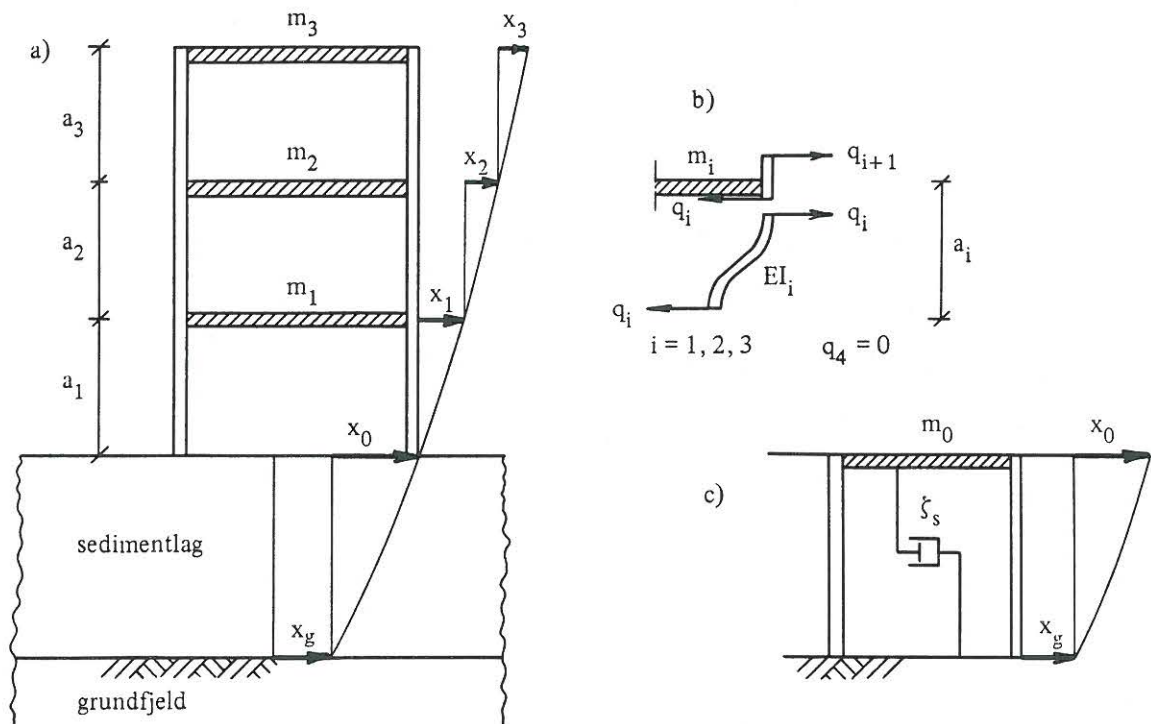
For påvirkninger over elasticitetsgrænsen opstår blivende deformationer. Den øjeblikkelige værdi af tilbageføringskraften afhænger i dette tilfælde ikke kun af den øjeblikkelige flytning $x(t)$, men af hele flytningshistorien $\{x(\tau), \tau \in [0, t]\}$ op til tidspunktet t .

Eksempel 1.3: Opstilling af systemligningerne for en jordskælvspåvirket 3-etages ramme.

Figur 1.5 viser en 3-etages bygning, funderet på et fleksibelt sedimentlag, der overlejrer et fast grundfjeld.

Såvel søjler som etagebjælker antages uendelig stive over for aksialdeformationer. Endvidere antages bøjningsstivheden af etagebjælkerne uendelig stor i forhold til søjlernes bøjningsstivhed. Søjlerne masse ignoreres, og al masse antages koncentreret i etageadskillelserne. Herved er rammens horizontale bevægelse beskrevet ved 3 frihedsgrader x_1, x_2, x_3 . x_1 er flytningen af etageadskillelse 1 relativt til jordoverfladen, x_2 er flytningen af etageadskillelse 2 relativt til etageadskillelse 1, og x_3 er flytningen af etageadskillelse 3 relativt til etageadskillelse 2, se figur 1.5 a. Bevægelsen af jordoverfladen relativt til grundfjeldet betegnes x_0 , mens den horizontale bevægelse af grundfjeldet benævnes x_g .

Den totale forskydningskraft i alle søjler mellem etageadskillelse $i-1$ og etageadskillelse i betegnes q_i , $i = 1, 2, 3$. Massen af etageadskillelse i betegnes m_i . Den totale horizontale flytning af etageadskillelse i bliver $x_g + x_0 + \sum_{j=1}^i x_j$.



Figur 1.5. a) Etagebygning med 3 frihedsgrader. b) Indre snitkræfter på fritskåret etagemasse. c) Forskydningsmodel for sedimentlag (Kanai-Tajimifilter).

Ved anvendelse af Newtons 2. lov for de fritskårne etagemasser findes nu, se figur 5.1 b

$$\left. \begin{aligned} m_1(\ddot{x}_g + \ddot{x}_0 + \ddot{x}_1) &= q_2 - q_1 \\ m_2(\ddot{x}_g + \ddot{x}_0 + \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= q_3 - q_2 \\ m_3(\ddot{x}_g + \ddot{x}_0 + \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3) &= -q_3 \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

De enkelte ligninger i (1-8) divideres med m_i . Dernæst trækkes den 1. ligning fra den 2. ligning, og den 2. ligning trækkes fra den 3. ligning. Herved opnås følgende differentiaalligningssystem, dekoblet i massematricen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{1}{m_1} (q_2 - q_1) - (\ddot{x}_0 + \ddot{x}_g) \\ \ddot{x}_2 &= \frac{1}{m_2} (q_3 - q_2) - \frac{1}{m_1} (q_2 - q_1) \\ \ddot{x}_3 &= -\frac{1}{m_3} q_3 - \frac{1}{m_2} (q_3 - q_2) \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

Den herved formulerede strukturmodel betegnes en *forskydningsmodel*.

Bevægelsen af jordoverfladen relativt til grundfjeldet x_0 afhænger af sedimentlagets dynamiske egenskaber. En simpel beskrivelse opnås ved at betragte sedimentlaget som et lineært viskøst dæmpet forskydningselement med 1 frihedsgrad, se figur 1.5 c. Reaktionen fra konstruktionen på den ækvivalente ramme, der repræsenterer sedimentlaget, antages ignorabel sammenlignet med inerti-, dæmpnings- og elastiske kræfter i sedimentlaget.

Ved anvendelse af Newtons 2. lov findes herved

$$m_0 (\ddot{x}_0 + \ddot{x}_g + 2\zeta_s \omega_s \dot{x}_0 + \omega_s^2 x_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{x}_0 + 2\zeta_s \omega_s \dot{x}_0 + \omega_s^2 x_0 = -\ddot{x}_g \quad (1-10)$$

ω_s er den laveste udæmpede cykliske egenfrekvens af sedimentlaget, og ζ_s er dæmpningsforholdet i den pågældende egensvingning. Modellen (1-10) betegnes et *Kanai-Tajimi*filter, [1]. Denne betegnelse refererer til, at sedimentlaget virker som et mekanisk filter, der forstærker harmoniske komponenter i jordskælvs-signalet med frekvenser tæt ved ω_s , mens øvrige harmoniske komponenter ikke forstærkes eller svækkes.

Ved benyttelse af (1-10) i (1-9) findes

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{1}{m_1} (q_2 - q_1) + 2\zeta_s \omega_s \dot{x}_0 + \omega_s^2 x_0 \\ \ddot{x}_2 &= \frac{1}{m_2} (q_3 - q_2) - \frac{1}{m_1} (q_2 - q_1) \\ \ddot{x}_3 &= -\frac{1}{m_3} q_3 - \frac{1}{m_2} (q_3 - q_2) \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

Systemligningerne er herved givet ved (1-10) og (1-11). Tilbage er blot at specificere de konstitutive betingelser, der fastlægger funktionssammenhængen mellem q_i og den relative etageflytning x_i , dvs.

$$q_i = q_i(x_i) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (1-12)$$

Under forudsætning af den tekniske bjælketeori haves specielt for et system med fast indspændte søjler

$$q_i = 12 \frac{EI_i}{a_i^3} x_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1-13)$$

E er elasticitetsmodulet, I_i er summen af bøjningsinertimomenterne af alle søjler mellem etageadskillelse $i-1$ og etageadskillelse i , og a_i er længden af disse søjler.

Som i eksempel 1.2 gælder, at den simple konstitutive ligning (1-12) kun har gyldighed, så længe der ikke forekommer blivende deformationer. I modsat fald afhænger $q_i(t)$ af hele differensflytningshistorien $\{x_i(\tau), \tau \in [0, t]\}$ op til tidspunktet t .

Bevægelsen af systemet beskrevet ved (1-1) er entydigt bestemt ud fra begyndelsesbetingelserne $(x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, \dot{x}_0)$ til tiden $t = 0$. Mere generelt gælder, at bevægelsen kan bestemmes ved (1-1) før og efter et vilkårligt tidspunkt $t_0 \in [0, \infty[$, når blot bevægelsestilstanden givet ved $(x(t_0), \dot{x}(t_0))$ kendes til dette tidspunkt. Vektoren $\mathbf{x}^T(t) = (x(t), \dot{x}(t))$ kaldes systemets *tilstandsvektor*, og $x(t)$, $\dot{x}(t)$ betegnes *tilstandsvariable*. Øvre indeks T betegner transponering.

Tilsvarende er (1-2) entydigt bestemt ud fra begyndelsesbetingelserne $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, hvor tilstandsvektoren er givet ved $\mathbf{x}^T(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t))$.

Differentialligningerne (1-1) og (1-2) løses normalt numerisk. Herved er det ofte en fordel at omskrive disse til et ækvivalent system af 1. ordens differentialligninger for tilstandsvariablerne. For (1-1) findes

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{1}{m} F(x) + \frac{1}{m} p(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y \\ -\frac{1}{m} F(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} p(t) \end{bmatrix} \quad (1-14a)$$

Tilsvarende kan (1-2) skrives

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}(t) \quad , \quad t > 0 \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (1-15a)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ -\frac{1}{m_1} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ -\frac{1}{m_n} F_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (1-15b)$$

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} p_1(t) \\ \vdots \\ \frac{1}{m_n} p_n(t) \end{bmatrix} \quad (1-15c)$$

Eksempel 1.4: 1. ordens differentialligninger for forskydningsmodel.

Det til (1-10), (1-11) hørende system af ækvivalente 1. ordens differentialligninger kan skrives

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b} \ddot{x}_g, \quad t > 0 \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (1-16)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (1-16a)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ -2\zeta_s \omega_s y_0 - \omega_s^2 x_0 \\ \frac{1}{m_1} (q_2(x_2) - q_1(x_1)) + 2\zeta_s \omega_s y_0 + \omega_s^2 x_0 \\ \frac{1}{m_2} (q_3(x_3) - q_2(x_2)) - \frac{1}{m_1} (q_2(x_2) - q_1(x_1)) \\ -\frac{1}{m_3} q_3(x_3) - \frac{1}{m_2} (q_3(x_3) - q_2(x_2)) \end{bmatrix} \quad (1-16b)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-16c)$$

I de omtalte eksempler er antydnet, at tilbageføringskraften afhænger ikke-lineært af udbøjningen x , dvs. $F = F(x)$. Mere generelt tillades denne at afhænge af x, \dot{x}, t , dvs.

$$F = F(x, \dot{x}, t) \quad (1-17a)$$

Det essentielle er, at tilbageføringskraften til tiden t er entydigt bestemt ved de indførte tilstandvariable. Tilsvarende tillades tilbageføringskræfterne F_i i (1-2) at afhænge af tilstandsvektoren \mathbf{x} og tiden t , dvs.

$$F_i = F_i(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t) \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (1-17b)$$

Endelig tillades de ydre belastninger p og p_i i (1-1) og (1-2) foruden af t at afhænge af de indførte tilstandsvariable *eller* af konstruktionens accelerationer \ddot{x} og $\ddot{x}_1, \dots, \ddot{x}_n$, dvs.

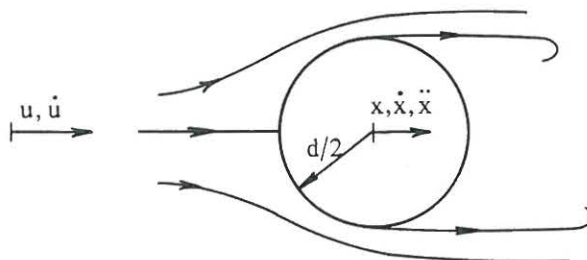
$$p = p(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) \quad (1-18a)$$

$$p_i = p_i(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, \ddot{x}_1, \dots, \ddot{x}_n, t) \quad (1-18b)$$

Ydre belastninger, der afhænger eksplicit af de indførte tilstandsvariable eller accelerationerne, betegnes *selvinducerede*.

Det fremgår af (1-17) og (1-18), at ikke-lineære svingningsligninger opstår, når de indre tilbageføringskræfter eller de ydre kræfter afhænger ikke-lineært af de indførte tilstandsvariable eller accelerationer.

Eksempel 1.5: Selvinduceret belastning.



Figur 1.6. Cirkulær cylinder i accelereret strømning.

En cirkulær cylinder nedsænkes i en accelereret strømning, i hvilken den udfører svingninger. Væskens partikelbevægelsesretning i den oprindelige strømning og svingningsretningen antages sammenfaldende. På et sted, hvor cylinderens hastighed og acceleration er hhv. \dot{x} og \ddot{x} , og væskens hastighed og acceleration er $u(t)$ og $\dot{u}(t)$, kan kraften pr. længdeenhed af cylinderen herved tilnærmet beskrives ved følgende version af Morison's formel

$$p(\dot{x}, \ddot{x}, t) = C_D \frac{\rho}{2} |u(t) - \dot{x}| (u(t) - \dot{x}) d + C_M \rho \frac{\pi}{4} d^2 \dot{u}(t) - (C_M - 1) \rho \frac{\pi}{4} d^2 \ddot{x} \quad (1-19)$$

Det 1. og 3. led på højresiden af (1-19) introducerer selvinducerede belastningskomponenter. C_D og $C_M (\simeq 2.0)$ er hhv. modstandstallet og massekoefficienten.

1.1 Klassifikation af ikke-lineariteter. Konservative og ikke-konservative kræfter.

Der skelnes mellem *geometriske* og *fysiske ikke-lineariteter*.

Geometriske ikke-lineariteter skyldes, at der ikke er linearitet mellem tøjninger og flytninger, ligesom ikke-lineariteter introduceres, når der tages hensyn til, at bevægelsesligningerne skal opstilles i den udbøjede tilstand og ikke i referencetilstanden (forskellen på α og α_0 i eksempel 1.1, der netop illustrerer geometrisk ikke-linearitet).

Fysiske ikke-lineariteter introduceres, når der er ikke-linearitet mellem tøjninger og spændinger, hvorimod de geometriske betingelser udmærket kan være lineære. Eksempel 1.2 illustrerer fysisk ikke-linearitet ved påvirkninger over proportionalitetsgrænsen.

Tilbageføringskræfterne F, F_i og de ydre belastninger p, p_i i (1-1) og (1-2) siges at være *konservative*, hvis nettoarbejdet, som disse udfører, når systemet føres igennem en vilkårlig række af tilstande tilbage til udgangstilstanden, er lig 0, dvs.

$$\oint F(x) dx = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^n \oint F_i(x_1, \dots, x_n) dx_i = 0 \quad (1-20)$$

$$\oint p(x) dx = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^n \oint p_i(x_1, \dots, x_n) dx_i = 0 \quad (1-21)$$

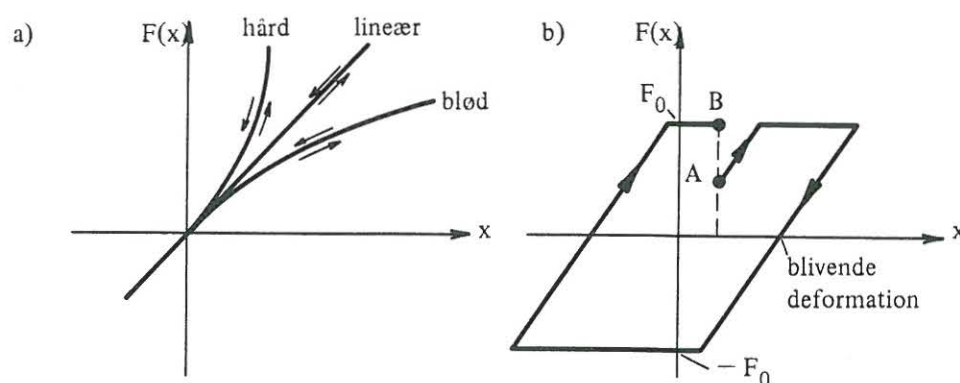
(1-20) og (1-21) indebærer, at der eksisterer tilstandsfunktioner $U(x)$, $U(x_1, \dots, x_n)$ og $W(x)$, $W(x_1, \dots, x_n)$, der kun afhænger af flytningerne, og har egenskaberne

$$F(x) = \frac{dU}{dx} \quad , \quad F_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (1-22)$$

$$p(x) = -\frac{dW}{dx} \quad , \quad p_i(x_1, \dots, x_n) = -\frac{\partial W}{\partial x_i} \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (1-23)$$

$U(x)+W(x)$ og $U(x_1, \dots, x_n)+W(x_1, \dots, x_n)$ repræsenterer systemets *potentielle energi*.

Den ydre belastning i eksempel 1.5 er ikke-konservativ. Tyngdekraften, der dog ikke er dynamisk, er konservativ.



Figur 1.7. a) Elastiske fjedre. b) Fjeder med hysteresese.

I figur 1.7 kan $F(x)$ begrebsmæssigt opfattes som en fjederkraft.

En konservativ fjederkraft er karakteriseret ved, at der ingen blivende deformationer opstår ved aflastning. Fjederen i eksempel 1.1 er konservativ. Fjederen i eksempel 1.2 er konservativ ved påvirkninger under elasticitetsgrænsen.

Vi vil synonymt benytte betegnelsen *elastiske fjedre* for konservative fjedre. En lineærelastisk fjederkraft er givet ved $F(x) = kx$. Elastiske fjedre, hvis trækarbejdskurve ligger over og under arbejdskurven for den lineære fjeder, og tangerer denne i $x = 0$, betegnes henholdsvis *hårde* og *bløde fjedre*, se figur 1.1a. Arbejdskurven i figur 1.3 repræsenterer en hård fjeder i træk og en blød fjeder i tryk. Arbejdskurven i figur 1.4 repræsenterer en blød fjeder.

Fjedre, der ikke er elastiske, besidder *hysteresevirkning*, se figur 1.7b. For disse gælder, at der eksisterer cirkulationer for hvilke

$$\oint F(x)dx > 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^n \oint F_i(x_1, \dots, x_n)dx_i > 0 \quad (1-24)$$

(1-24) indebærer, at den indre fjederkraft udfører et nettoarbejde på systemet i løbet af en lastcykel. Den hertil svarende mekaniske energi går tabt som varme. Sådanne systemer betegnes *dissipative*.

Alle virkelige fjederkræfter besidder mere eller mindre hysteresevirkning.

Ofte udskilles den elastiske del og hysterese delen af tilbageføringskraften på følgende form

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= z + \frac{dU}{dx} \\ F_i(\mathbf{x}, t) &= z_i + \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad , \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (1-25)$$

I det simpleste tilfælde afhænger hystereseleden z kun af tilstandsvariable x, \dot{x} og t , dvs.

$$F(x, \dot{x}, t) = g(x, \dot{x}, t) + f(x) \quad (1-26)$$

hvor

$$z = g(x, \dot{x}, t) \quad (1-26a)$$

$$f(x) = \frac{dU}{dx} \quad (\text{konservativ kraftdel}) \quad (1-26b)$$

Om $g(x, \dot{x}, t)$ gælder betingelserne

$$g(x, 0, t) = 0 \quad (1-27)$$

$$\oint g(x, \dot{x}, t) dx > 0 \quad (1-28)$$

(1-27) indebærer, at der ingen dissipation forekommer, når hastigheden $\dot{x} = 0$.

(1-28), der skal opfyldes for vilkårlige cirkulationer, indebærer netop, at $g(x, \dot{x}, t)$ er dissipativ.

Den simpleste model er den lineært viskose dæmpningsmodel

$$g(x, \dot{x}, t) = c \cdot \dot{x} \quad , \quad c > 0 \quad (1-29)$$

For denne gælder

$$\oint c \dot{x} dx = \int_0^T c \cdot \dot{x} \dot{x} dt = c \int_0^T \dot{x}^2 dt > 0 \quad (1-30)$$

I (1-30) er T er cirkulationsperioden. (1-29) opfylder dermed betingelserne (1-27) og (1-28).

Mulige ikke-lineære dæmpningsmodeller er

$$g(x, \dot{x}, t) = \begin{cases} \mu, & \dot{x} > 0 \\ 0, & \dot{x} = 0 \\ -\mu, & \dot{x} < 0 \end{cases} \quad , \quad \mu > 0 \quad (1-31)$$

og

$$g(x, \dot{x}, t) = c |\dot{x}| \dot{x} \quad , \quad c > 0 \quad (1 - 32)$$

(1-29), (1-31), (1-32) er alle regressionsmodeller, der kalibreres til at beskrive én eller flere aspekter af dissipationen. En vis fysisk begrundelse kan gives for (1-31), der betegnes *Coulomb dæmpning* (tør friktion).

Modellen (1-26) er brugelig ved mindre hysteresevirkning. Ved kraftig hysteresevirkning, som det er tilfældet på den idealelastisk-idealplastiske fjeder i figur 1.7 b, må der tages hensyn til, at z ikke kun afhænger af x og \dot{x} , men af hele deformationshistorien $\{x(\tau), \tau \in [0, t[$ op til tiden t . I figuren er flytningen x ens i punkterne A og B . Endvidere kan vi forestille os, at hastigheden \dot{x} er ens i disse punkter. Alligevel er tilbageføringskraften F forskellig, hvorfor F ikke blot afhænger af x og \dot{x} . I næste afsnit omtales dæmpningsmodeller, der kan tage dette forhold i betragtning.

1.2 Hysteresemodeller.

Historieafhængigheden af tilbageføringskraften kan tages i regning ved at indføre hysteresekomponenten z som ekstra tilstandsvariabel. For denne må da indføres en ekstra ikke-lineær førsteordens differentiaalligning, der reelt er en konstitutiv ligning på inkremental form, dvs. en specifikation af sammenhængen mellem differentielle tilvækster dz af z og tilvækster dx af x . Metoden illustreres med udvalgte modeller nedenfor.

Bilineær oscillator, [2]:

Tilbageføringskraften skrives på formen

$$F(x, z) = k_0 x + k_1 z \quad (1 - 33)$$

For hysteresekomponenten z gælder differentiaalligningen

$$\dot{z} = \kappa(\dot{x}, z) \dot{x} \quad (1 - 34)$$

$$\kappa(\dot{x}, z) = 1 - H(z - z^0) (1 - H(-\dot{x})) - H(-z - z^0) (1 - H(\dot{x})) \quad (1 - 35)$$

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (1 - 36)$$

z kan opfattes som en idealelastisk-idealplastisk tilbageføringskomponent med dimension af længde, der er normeret, så hældningen bliver 1:1 i det elastiske område.

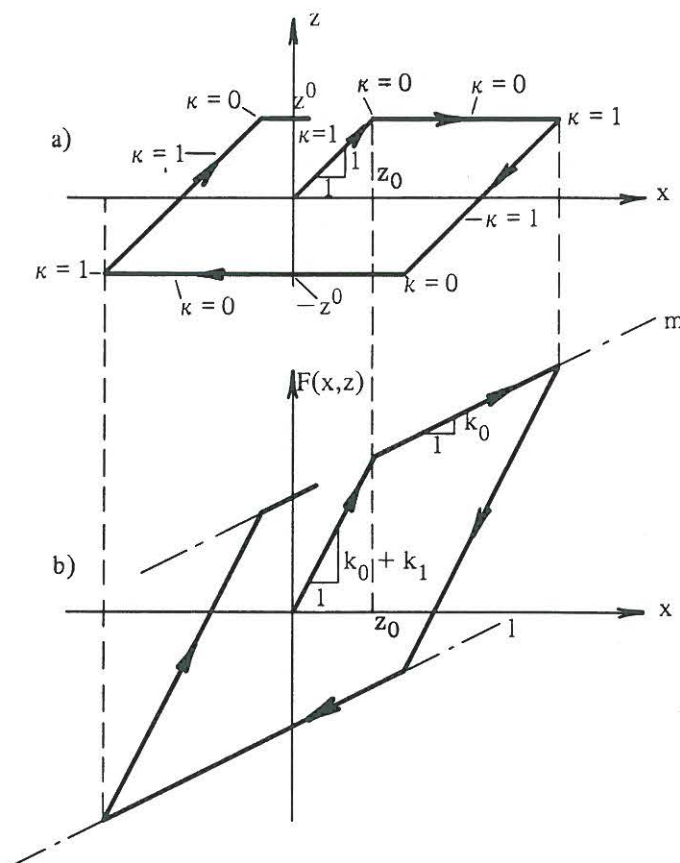
z^0 er flydegrænsen, der tillige bliver flytningen, hvor flydning første gang indtræffer.

$\kappa(\dot{x}, z)$ repræsenterer en dimensionsløs fjederstivhed af hysteresekomponenten.

$\kappa(\dot{x}, z) = 0$, når oscillatoren er i det plastiske område, eller er på vej til at bevæge sig ind i dette. $\kappa(\dot{x}, z) = 1$, når oscillatoren er i det elastiske område, eller er på vej til at bevæge sig ind i dette fra det plastiske område ($\dot{x} = 0$). Variationen af $\kappa(\dot{x}, z)$ er vist i figur 1.8a.

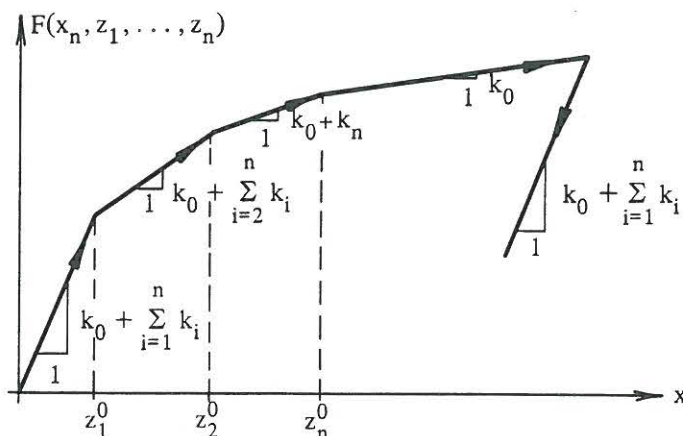
$H(x)$ i (1-36) angiver Heavisides enhedsstepfunktion. Bemærk, at de i figur 1.8a viste værdier af $\kappa(\dot{x}, z)$ i aflastningspunkterne kun opnås, fordi vi har defineret $H(0) = 1$.

Den fysiske tolkning af parametrene k_0, k_1 i (1-33) er herefter, at $k_0 + k_1$ og k_0 repræsenterer oscillatorens primære og sekundære stivhed i henholdsvis det elastiske og det plastiske område, se figur 1.8b. Alle plastiske belastningsgrene vil være beliggende på to indbyrdes parallelle, faste linier l og m , placeret som vist i figuren. En idealelastisk-idealplastisk oscillator opnås for $k_0 = 0$.



Figur 1.8. Bilineær oscillator. a) Arbejdscurve for hysteresekomponent. b) Arbejdscurve for samlet tilbageføringskraft.

Polylineær oscillator, [2]:



Figur 1.9. Arbejdscurve for polylineær oscillator.

Med henblik på en generalisering af (1-33) skrives tilbageføringskraften på formen

$$F(x, z_1, \dots, z_n) = k_0 x + k_1 z_1 + \dots + k_n z_n \quad (1-37)$$

z_1, \dots, z_n er idealelastisk-idealplastiske tilbageføringskomponenter med flydeniveauer z_1^0, \dots, z_n^0 , hvor $z_1^0 < \dots < z_n^0$. Hysteresekomponenterne er alle normeret, så hældningen er 1:1 i det elastiske område. Hver hysteresekomponent er bestemt ved den konstitutive ligning

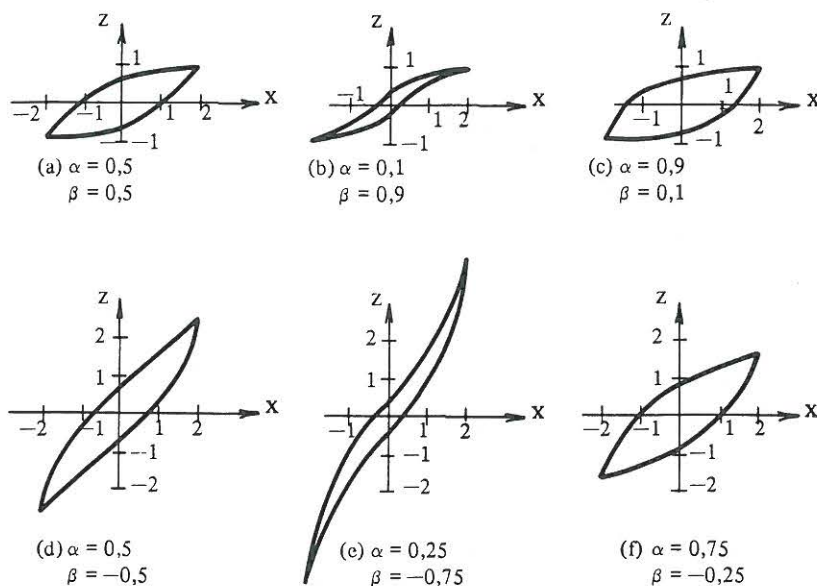
$$\dot{z}_i = \kappa_i(\dot{x}, z_i) \dot{x} \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (1-38)$$

$$\kappa_i(\dot{x}, z_i) = 1 - H(z_i - z_i^0) (1 - H(-\dot{x})) - H(-z_i - z_i^0) (1 - H(\dot{x})) \quad (1-39)$$

Ved (1-37) er der indført n ekstra tilstandsvariable z_1, \dots, z_n . Svarende hertil er ved (1-38) opstillet n nye differentiaalligninger.

Virkningen af (1-38), (1-39) kan forklares som følger, se figur 1.9. Når $x < z_1^0$ er alle hysteresekomponenter elastiske. I henhold til (1-37) er fjederstivheden her $k_0 + \sum_{i=1}^n k_i$. Øges flytningen, så $z_1^0 < x < z_2^0$, sætter hysteresekomponent 1 ud, så stivheden over for merbelastninger bliver $k_0 + \sum_{i=2}^n k_i$. Øges belastningen yderligere, sætter flere og flere hysteresekomponenter ud, svarende til at stivheden reduceres. Når $x > z_n^0$ er stivheden over for merbelastninger k_0 . På ethvert tidspunkt af processen vil aflastning ($\dot{x} < 0$) resultere i, at alle hysteresekomponenter bliver elastiske, og fjederstivheden derfor er $k_0 + \sum_{i=1}^n k_i$.

Bouc-Wen hysteresese, [3, 4]:

Figur 1.10. Bouc-Wen hysteresese, $n = 1$, [4].

Tilbageføringskraften $F(\dot{x}, z)$ og den konstitutive ligning er igen givet ved (1-33) og (1-34), dog er den dimensionsløse fjederstivhed givet ved

$$\kappa(\dot{x}, z) = \begin{cases} 1 - \alpha \frac{|\dot{x}|}{\dot{x}} z^n - \beta |z|^n, & n \text{ ulige} \\ 1 - \alpha \frac{|\dot{x}|}{\dot{x}} z^{n-1} |z| - \beta z^n, & n \text{ lige} \end{cases} \quad (1-40)$$

hvor n, α, β er konstanter, der fastlægges ved forsøg.

En hel klasse af krumme hysteresesløjfer kan modelleres ved hjælp af (1-40). I figur 1.10 er vist forskellige former for $n = 1$ og forskellige kombinationer af værdier af α og β . a) - c) viser bløde fjedersystemer med forskellig grad af hysteresese, mens d) - e) angiver hårde fjedersystemer med variabel grad af hysteresese.

Med tilbageføringskraften givet ved (1-33) og (1-34) ændres differentialligningssystemet (1-14) til følgende form

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}(t) \quad , \quad t > 0 \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (1-41)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y \\ -\frac{1}{m} (k_0 x + k_1 z) \\ \kappa(y, z) y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} p(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-41a)$$

hvor $\kappa(y, z)$ er givet ved (1-35) for en bilineær oscillator, og ved (1-40) for Bouc-Wen hysteresese.

For en polylineær oscillator bliver differentialligningssystemet tilsvarende

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}(t) \quad , \quad t > 0 \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (1-42)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y \\ -\frac{1}{m}(k_0 x + k_1 z_1 + \dots + k_n z_n) \\ \kappa_1(y, z_1) y \\ \vdots \\ \kappa_n(y, z_n) y \end{bmatrix} \quad (1-42a)$$

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} p(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-42b)$$

Som det fremgår af (1-33) og (1-37) bliver tilbageføringskraften ved den her beskrevne fremgangsmåde en lineær funktion af de indførte tilstandsvariable, hvori-
mod ikke-lineariteterne er forlagt til de konstitutive ligninger (1-34), (1-38).

Eksempel 1.6: 1. ordens differentialligninger for forskydningsmodel med hysteresevirkning i søjler.

Vi betragter atter 3-etages bygningen i eksempel 1.3. Forskydningskraften q_i mellem etageadskillelse $i-1$ og etageadskillelse i antages at besidde hysteresevirkning. I analogi med (1-33) skrives forskydningskraften på formen

$$q_i(x_i, z_i) = k_i((1 - \alpha_i)x_i + \alpha_i z_i) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (1-43)$$

$$\dot{z}_i = \kappa_i(\dot{x}_i, z_i) \dot{x}_i \quad (1-43a)$$

$$k_i = 12 \frac{EI_i}{a_i^3} \quad (1-43b)$$

$\alpha_i \in [0, 1]$ betegner graden af hysterese. $\alpha_i = 0$ svarer til elastiske søjler. $\kappa_i(\dot{x}_i, z_i)$ er givet ved (1-35) i tilfælde af bilineære søjler og ved (1-40) i tilfælde af Bouc-Wen hysterese.

Det ækvivalente system af 1. ordens differentialligninger bliver i dette tilfælde

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b} \ddot{x}_g \quad , \quad t > 0 \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (1-44)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-44a)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ -2\zeta_s \omega_s y_0 - \omega_s^2 x_0 \\ \frac{1}{m_1} (q_2(x_2, z_2) - q_1(x_1, z_1)) + 2\zeta_s \omega_s y_0 + \omega_s^2 x_0 \\ \frac{1}{m_2} (q_3(x_3, z_3) - q_2(x_2, z_2)) - \frac{1}{m_1} (q_2(x_2, z_2) - q_1(x_1, z_1)) \\ - \frac{1}{m_3} q_3(x_3, z_3) - \frac{1}{m_2} (q_3(x_3, z_3) - q_2(x_2, z_2)) \\ \kappa_1(y_1, z_1) y_1 \\ \kappa_2(y_2, z_2) y_2 \\ \kappa_3(y_3, z_3) y_3 \end{bmatrix} \quad (1-44b)$$

De følgende betragtninger forudsætter, at systemets bevægelsesligninger skrives som et ækvivalent system af koblede, ordinære 1. ordens differentiaalligninger i stil med (1-14), (1-15), (1-41), (1-42)

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad , \quad t > 0 \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{array} \right\} \quad (1-45)$$

eller på indeksform

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_m, t) \quad , \quad t > 0 \\ x_i(0) = x_{i,0} \quad , \quad i = 1, \dots, m \end{array} \right\} \quad (1-45a)$$

Antallet af ligninger er $m \geq 2n$, hvor n er antallet af frihedsgrader. $m - 2n$ angiver antallet af indre frihedsgrader, der er indført for at beskrive hysteres, bestemt ved differentiaalligninger af typen (1-34) og (1-38), eller ekstra frihedsgrader indført ved filtrerede ydre belastninger, bestemt ved differentiaalligninger som (1-10).

En formulering af typen (1-45) er altid mulig, selv når de ydre belastninger afhænger af accelerationerne, jf. (1-18a), (1-18b). I dette tilfælde starter man med at løse bevægelsesligningerne (1-1), (1-2) med hensyn til accelerationerne $\ddot{x}, \ddot{x}_i, i = 1, \dots, n$. Ved fluiddynamiske belastninger volder dette ingen vanskeligheder, da belastningens afhængighed af accelerationen i dette tilfælde er lineær. Man flytter da blot dette led over på den anden side af lighedstegnet og adderer de fluiddynamiske (medsvingende) masser til de strukturelle.

1.3 Referencer.

- [1] Tajimi, H.: *A Statistical Method of Determining the Maximum Response of a Building Structure During an Earthquake*. Proc. 2nd World Conf. Earthquake Eng., Tokyo, Vol. 2, 781-797 (1960).
- [2] Minai, R. and Y. Suzuki: *Seismic Reliability Analysis of Building Structures*. Proc. ROC - Japan Joint Seminar on Multiple Hazards Mitigation, National Taiwan University, ROC, 193-208 (1985).
- [3] Bouc, R.: *Forced Vibration of Mechanical System with Hysteresis*. Abstract, Proc. 4th Conf. Nonlinear Oscillations, Prague (1967).
- [4] Wen, Y. - K.: *Method for Random Vibration of Hysteretic Systems*. J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 102, No. EM2, 249-263 (1976).

2. KVALITATIVE METODER

Ikke-lineære systemer er væsentligt vanskeligere at analysere end lineære systemer. Dette skyldes; at superpositionsprincippet ikke gælder i dette tilfælde, hvorved gensvaret på forskellige påvirkninger ikke kan adderes lineært.

Der er 2 primære indfaldsvinkler til analysen af ikke-lineære systemer, nemlig *kvalitative* og *kvantitative metoder*.

Kvalitative metoder omhandler bl.a. stabilitetsanalysen af et system i omegnen af en kendt løsning, snarere end fastlæggelsen af denne løsnings eksplicite afhængighed af tiden. Kvantitative metoder har netop til formål at etablere sådanne funktionssammenhænge. For ikke-lineære systemer kan denne i reglen kun tilvebringes approksimativt. Kvantitative metoder behandles i kapitel 3.

2.1 Grundlæggende begreber i stabilitetsteori.

Bevægelsesligningen for et diskret system med n frihedsgrader er givet ved (1.45), der på indeksform lyder

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_m, t), \quad x_i(0) = x_{i,0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad m \geq 2n \quad (2-1)$$

Specielt for et system af 1 frihedsgrad uden hysterese frihedsgrader antager (2-1) formen

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f_2(x, y, t) \end{array} \right\} \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (2-2)$$

Systemet benævnes *autonomt*, hvis tiden ikke indgår eksplicit i ligningen. Dette indebærer, at hverken de ydre kræfter (1-18) eller tilbageføringskræfterne (1-17) afhænger af tiden. Tidsvarierende tilbageføringskræfter kan eksempelvis opstå, når koefficienterne i funktionsudtrykket for disse afhænger eksplicit af tiden. Autonome systemer kan kun påvirkes af statiske ydre belastninger eller selvinducerede belastninger af typen $p = p(x, \dot{x}, \ddot{x})$. Karakteristiske systemparametre som masse, dæmpningskonstanter og fjederstivheder kan ikke afhænge eksplicit af tiden i et autonomt system.

For et autonomt system antager (2-1) formen

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_m), \quad x_i(0) = x_{i,0}, \quad i = 1, \dots, m \quad (2-3)$$

Systemet (2-2) er autonomt, hvis f_2 ikke afhænger af t .

Eksempel 2.1: Eksempler på ikke-lineære bevægelsesligninger.

Følgende bevægelsesligninger for et system af 1 frihedsgrad beskriver alle autonome systemer

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad \mu > 0, \quad (\text{Van der Pol oscillator}) \quad (2-4)$$

$$\ddot{x} - \mu(1 + \alpha\dot{x}^2)\dot{x} + x = 0, \quad (\text{Rayleigh oscillator}) \quad (2-5)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + \mu x^2)x = 0, \quad (\text{Duffing oscillator}) \quad (2-6)$$

Det bemærkes, at Duffing oscillatoren (2-6) er uden dissipativt led.

Følgende bevægelsesligninger beskriver alle ikke-autonome systemer

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + \mu x^2)x = p_0 \cos \omega t \quad (\text{Duffing oscillator, harmonisk belastet}) \quad (2-7)$$

$$\ddot{x} + (\delta + 2\epsilon \cos 2t)x = 0, \quad (\text{Mathieu's differential equation}) \quad (2-8)$$

Mathieuligningen kan opfattes som bevægelsesligningen for et lineært system af 1 frihedsgrad, hvor fjederstivheden varierer harmonisk i tiden. Denne ligning opstår ved stabilitetsanalyse af periodiske bevægelser.

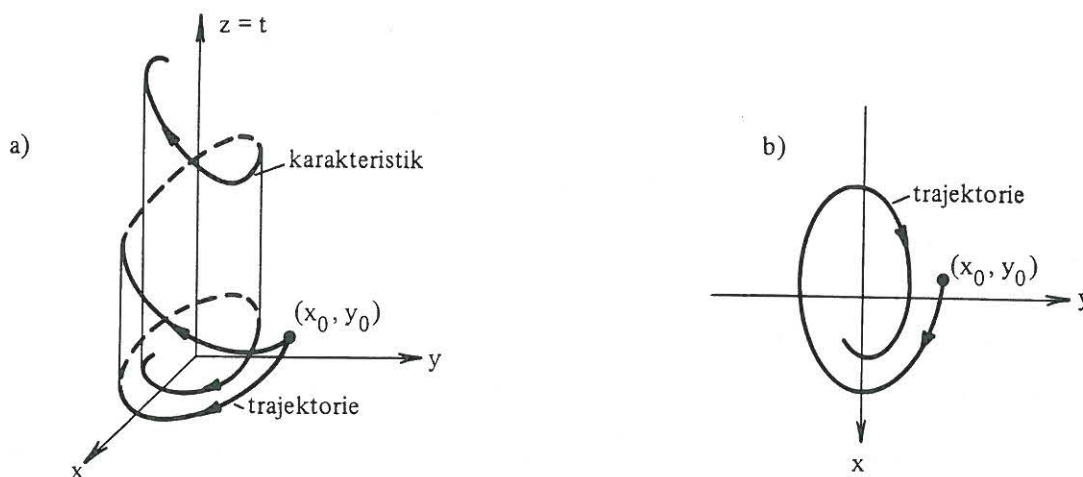
Løsningerne til (2-1) beskrives i et m -dimensionalt rum, der kaldes *faserummet*. Svarende til, at vektoren $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ betegnes tilstandsvektoren, benyttes synonymt betegnelsen *tilstandsrummet* for løsningsrummet. For $m = 2$ taler man specielt om *faseplanen*, der med tilstandsvariablerne i (2-3) udgøres af $x - y$ planen.

Funktionerne $f_i : R^{m+1} \rightarrow R$ på højresiden af (2-1) antages at have en sådan karakter, at differentiaalligningssystemet for et givet sæt begyndelsesbetingelser $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ har en entydig løsning, dvs.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0), \quad t \geq 0 \quad (2-9)$$

(2-9) repræsenterer parameterfremstillingen for en rumkurve i faserummet med t som parameter. Denne rumkurve betegnes en *trajektorie*. Løsningen og den hertil svarende trajektorie kan i princippet forlænges til tidspunkter før $t = 0$. Man taler om *positive halvtajektorier*, hvor $t \geq 0$, og *negative halvtajektorier*, hvor $t < 0$. Som antydnet ved (2-9) skal vi kun beskæftige os med positive halvtajektorier. Med trajektorier menes i det følgende derfor positive halvtajektorier.

For forskellige begyndelsesbetingelser opnås forskellige løsninger og hertil svarende trajektorier. Mængden af alle mulige trajektorier betegnes *faseportrættet*.



Figur 2.1. a) Bevægelsesrum. b) Faseplan.

(2-1) kan gøres autonom ved at indføre tiden t som en ekstra koordinat, i.e.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} x_i &= f_i(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}), \quad i = 1, \dots, m \\ \frac{d}{dt} x_{m+1} &= f_{m+1}(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

Det $(m+1)$ -dimensionale løsningsrum defineret ved x_1, \dots, x_m, x_{m+1} betegnes *bevægelsesrummet*. Trajektorier i bevægelsesrummet betegnes *karakteristikker* eller *bevægelser*, se figur 2.1. Trajektorierne fremkommer ved projektion af karakteristikkene på det m -dimensionale faserum. Til hver løsning (2-9) svarer en og kun en karakteristik. Derimod kan forskellige løsninger udmærket have samme trajektorie, svarende til at karakteristikkene projekteres i samme kurve.

Tilstandsfarten defineres ved

$$\begin{aligned} V(x_1, \dots, x_m, t) &= (\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_m^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (f_1^2(x_1, \dots, x_m, t) + \dots + f_m^2(x_1, \dots, x_m, t))^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2-11)$$

Hvis $\exists t \geq 0 : V(x_1, \dots, x_m, t) \neq 0$, betegnes (x_1, \dots, x_m) et *regulært punkt*, mens et punkt, hvor $\forall t \geq 0 : V(x_1, \dots, x_m, t) = 0$ betegnes et *singulært punkt* eller et *ligevægtspunkt*. Man taler om et *isoleret ligevægtspunkt*, hvis der i en vilkårlig lille omegn om punktet kun findes regulære punkter. I det følgende betragtes udelukkende isolerede ligevægtspunkter.

Hvis $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0$ er et ligevægtspunkt, opfylder højresiderne til (2-1) betingelsen $\forall t \geq 0 : f_1(x_1^0, \dots, x_m^0, t) = 0$, hvorfor (2-1) har løsningen $x_i(t) \equiv x_i^0 = x_{i,0}$. Hvis

systemet derfor til tiden $t=0$ befinder sig i et ligevægtspunkt, forbliver det i dette til alle efterfølgende tidspunkter, og vil have befundet sig deri til alle forgående tidspunkter. Vi vil af denne grund betegne et ligevægtspunkt som en *konstant bevægelse*. Bevæger et system sig i omegnen af en konstant bevægelse, kan det først nå denne i grænserne $t \rightarrow \pm\infty$. Antages nemlig, at systemet når den konstante bevægelse i et endeligt tidsrum, vil bevægelsen forblive konstant i ethvert foregående og efterfølgende endeligt tidsrum, i strid med antagelsen.

I fald der eksisterer et tal $T > 0$, således at det for alle $t \geq 0$ gælder

$$\mathbf{x}(t+T; \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \quad (2-12)$$

siges bevægelsen at være *periodisk*. *Perioden* T er det mindste tal for hvilket (2-12) er opfyldt. Af (2-12) følger, at også hastigheden er periodisk, dvs. $\dot{\mathbf{x}}(t+T; \mathbf{x}_0) = \dot{\mathbf{x}}(t; \mathbf{x}_0)$.

En nødvendig men ikke tilstrækkelig betingelse for en periodisk bevægelse er da, at højresiden af (2-1) er periodiske funktioner i tiden med perioden T , dvs.

$$\forall t \geq 0 : f_i(x_1^0, \dots, x_m^0, t) = f_i(x_1^0, \dots, x_m^0, t+T) \quad (2-13)$$

(2-13) er automatisk opfyldt for autonome systemer.

Periodiske bevægelser repræsenteres åbenbart ved lukkede trajektorier i faserummet. Alle bevægelser med begyndelsespunkt på trajektorien for en given periodisk bevægelse er selv periodiske bevægelser med samme trajektorie som den forelagte. Til en given lukket trajektorie svarer der således uendelig mange periodiske bevægelser, der dog alle kan frembringes af hverandre ved en faseforskydning.

Hvis en bevægelse er periodisk til et givet tidspunkt, forbliver den periodisk til alle efterfølgende og foregående tidspunkter. Bevæger et system sig ikke-periodisk i omegnen af en periodisk bevægelse, kan det først nå denne i grænserne $t \rightarrow \pm\infty$. Antages, at systemet når den periodiske bevægelse i et endeligt tidsrum, vil bevægelsen forblive periodisk i ethvert foregående og efterfølgende tidsrum, i strid med antagelsen.

Betragt en given bevægelse $\mathbf{x}^0(t; \mathbf{x}_0^0)$, der opfylder (2-1) med givne begyndelsesbetingelser \mathbf{x}_0^0 . Lad $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ være en vilkårlig anden bevægelse, svarende til begyndelsesbetingelserne \mathbf{x}_0 . Idet vor interesse knytter sig til bevægelser, der forløber i omegnen af $\mathbf{x}^0(t; \mathbf{x}_0^0)$, vil vi referere til $\mathbf{x}^0(t; \mathbf{x}_0^0)$ som den *uperturberede bevægelse*, og til $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ som den *perturberede bevægelse*. Af uperturberede bevægelser skal vi i det følgende specielt betragte konstante bevægelser (ligevægtstilstande) og periodiske bevægelser som beskrevet ovenfor. Vi indfører *perturbationen*

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^0(t; \mathbf{x}_0^0) \quad (2-14)$$

Ved differentiation af (2-14), og udnyttelse af, at såvel $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ som $\mathbf{x}^0(t; \mathbf{x}_0^0)$ er bevægelser, og derfor opfylder (2-1), udledes følgende differentialligning for perturbationen

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{r}, t) \quad , \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 \quad (2-15)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + \mathbf{r}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0, t) \quad (2-15a)$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^0 \quad (2-15b)$$

I faserummet svarende til (2-15) er $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ åbenbart et ligevægtspunkt. Stabilitetsanalyser kan således reduceres til analysen af stabiliteten af ligevægtspunktet $\mathbf{r} = \mathbf{0}$

Som afstandsmål i faserummet indføres den euklidiske længde

$$|\mathbf{r}| = \left(\sum_{i=1}^m r_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2-16)$$

Stabilitet af bevægelser af dynamiske systemer kan indføres på mange måder. Vi skal her benytte en definition, der skyldes Liapunov [1]:

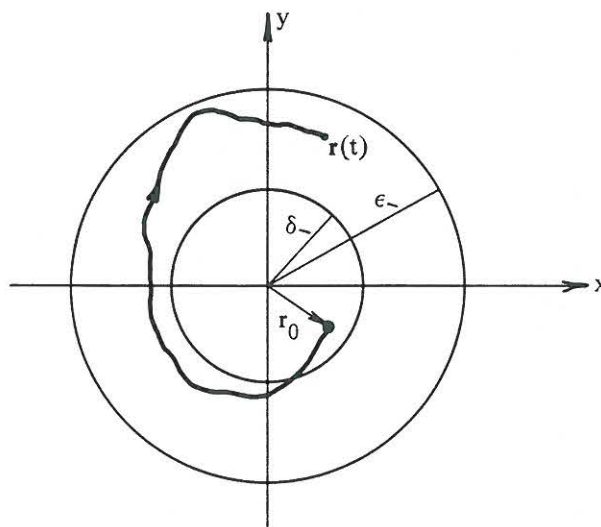
1. Den uperturberede bevægelse siges at være *stabil*, hvis perturbationen bestemt som løsning til (2-15) opfylder

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall t > 0: \quad |\mathbf{r}_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{r}(t)| < \varepsilon \quad (2-17)$$

2. Den uperturberede bevægelse siges at være *asymptotisk stabil*, hvis den er stabil, og der eksisterer et δ således $|\mathbf{r}_0| < \delta$ medfører

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{r}(t)| = 0 \quad (2-18)$$

3. Den uperturberede bevægelse er *instabil*, hvis den hverken er stabil eller asymptotisk stabil.



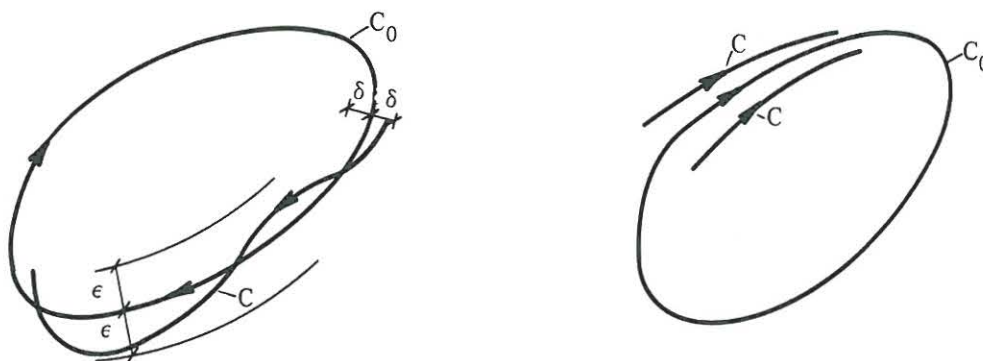
Figur 2.2. Liapunovstabil uperturberet bevægelse.

(2-17) er illustreret på figur 2.2. Geometrisk betyder definitionen, at hvis afstanden mellem $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0; \mathbf{x}_0)$ og $\mathbf{x}_0^0 = \mathbf{x}^0(0; \mathbf{x}_0^0)$ til tiden $t=0$ er mindre end δ , forbliver afstanden i al fremtid mindre end ε .

De følgende stabilitetsdefinitioner, der også skyldes Liapunov, vedrører egenskaber ved trajektorier for periodiske bevægelser. Lad C_0 være den lukkede trajektorie for den uperturberede periodiske bevægelse $\mathbf{x}_0(t; \mathbf{x}_0^0)$, mens C betegner trajektorien for den perturbede bevægelse $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$. Analog til stabilitetsdefinitionerne for bevægelsen indføres nu følgende definitioner:

1. C_0 siges at være *orbital stabil*, hvis $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, således at hvis afstanden mellem C og C_0 til et givet tidspunkt t_0 er mindre end δ , forløber hele trajektorien C i al fremtid indenfor et ε -bånd omkring C_0 . Eksisterer der intet sådant δ , siges C_0 at være *orbitalt instabil*.
2. C_0 siges at være *asymptotisk orbitalt stabil*, hvis C_0 er orbital stabil, og afstanden mellem C og C_0 går mod 0 for $t \rightarrow \infty$.

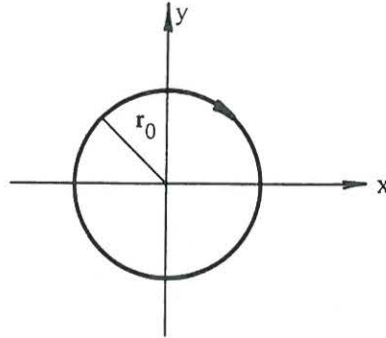
Forholdene er illustreret på figur 2.3.



Figur 2.3. a) Orbital stabil trajektorie. b) Asymptotisk orbital stabil trajektorie.

Forskellen mellem de 2 typer af stabilitetsdefinitioner knytter sig til forskellen på bevægelser og trajektorier. Stabilitet af en periodisk bevægelse indebærer orbital stabilitet. Det omvendte forhold er ikke tilfældet. Ligeledes kan en asymptotisk orbital stabil trajektorie udemærket indebære, at de underliggende bevægelser er instabile.

Eksempel 2.2: Stabilitet og orbital stabilitet af harmoniske bevægelser.



Figur 2.4. Trajektorie for harmonisk bevægelse med amplitude r_0 .

For at illustrere forskellen på stabilitet af bevægelse og orbital stabilitet, betragtes et system beskrevet ved

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} &= -x\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned} \right\}, \quad x(0) = r_0 \cos \varphi_0, \quad y(0) = -r_0 \sin \varphi_0 \quad (2-19)$$

(2-19) har løsningen

$$\left. \begin{aligned} x^0(t) &= r_0 \cos(r_0 t + \varphi_0) \\ y^0(t) &= -r_0 \sin(r_0 t + \varphi_0) \end{aligned} \right\} \quad (2-20)$$

Alle trajektorier svarende til (2-20) bliver koncentriske cirkler om centrum, se figur 2.4. Disse er åbenbart alle orbitalt stabile, da vi kan vælge $\delta = \varepsilon$.

Betragt nu en fra $(x^0(t), y^0(t))$ forskellig løsning til (2-19), der tilfredsstiller begyndelsesbetingelserne $(x(0), y(0)) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, hvor $r \neq r_0$. Initialperturbationen er da givet ved

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} r \cos \varphi - r_0 \cos \varphi_0 \\ r \sin \varphi - r_0 \sin \varphi_0 \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

Ved at vælge δ passende lille, kan $|\mathbf{r}_0|$ gøres arbitrært lille, svarende til at den uperturberede og den perturberede bevægelse initielt starter arbitrært tæt ved hverandre. Imidlertid vil løsningerne fjerne sig mere end ε fra hverandre, fordi perioderne $\frac{2\pi}{r_0}$ og $\frac{2\pi}{r}$ er forskellige.

Alle bevægelser til (2-19), hvor $r \neq r_0$ er dermed instabile.

Nu antages, at funktionerne $f_i(x_1, \dots, x_m, t)$ i (2-1) besidder partielle afledede mht. x_1, \dots, x_m . I så fald kan (2-15) skrives

$$\dot{r}_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}(t)r_j + o(|\mathbf{r}|), \quad r_i(0) = r_{i,0}, \quad i = 1, \dots, m \quad (2-22)$$

$$a_{ij}(t) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\mathbf{x}^0(t), t), \quad i, j = 1, \dots, m \quad (2-22a)$$

Poincaré [2] antog, at man kunne udtale sig om stabiliteten af den uperturberede bevægelse, ud fra den lineære del af (2-22), svarende til at restleddet ignoreres. En sådan analyse kaldes en *infinitesimal analyse*. Ved en infinitesimal analyse betragtes følgelig det lineære differentialligningssystem

$$\dot{r}_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}(t) r_j, \quad r_i(0) = r_{i,0}, \quad i = 1, \dots, m \quad (2-23)$$

(2-23) betegnes *variationsligningssystemet*. En infinitesimal analyse kan i almindelighed kun give pålidelige informationer om egenskaberne af den perturberede bevægelse i den umiddelbare omegn af den uperturberede bevægelse.

Forudsætningen for overhovedet at foretage en infinitesimal analyse er selvfølgelig, at de partielt afledede (2-22a) eksisterer. Dette er *ikke* tilfældet for højresiderne af de konstitutive ligninger (1-34), (1-38). Grunden hertil er, at de dimensionsløse fjederstivheder $\kappa(\dot{x}, z)$ og $\kappa_i(\dot{x}, z_i)$ givet ved (1-35), (1-39), (1-40) for $\dot{x} = 0$ har 2 forskellige hældninger. Funktionerne er dermed ikke analytiske.

Det bemærkes, at koefficienterne a_{ij} er konstanter ved ligevægtspunkter i autonome systemer. Af (2-13) følger, at a_{ij} i tilfælde af periodiske uperturberede bevægelser bliver periodiske funktioner af tiden med perioden T

$$\forall t \geq 0 : a_{ij}(t) = a_{ij}(t + T) \quad (2-24)$$

Eksempel 2.3: Infinitesimale ligninger for systemer af 1 frihedsgrad.

For systemet (2-2) bliver de infinitesimale ligninger ved (2-23)

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_0(t) & -c_0(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r_1(0) \\ r_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1,0} \\ r_{2,0} \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

$$k_0(t) = -\frac{\partial}{\partial x} f_2(x^0(t), y^0(t), t) \quad (2-26)$$

$$c_0(t) = -\frac{\partial}{\partial y} f_2(x^0(t), y^0(t), t) \quad (2-27)$$

For et system af en frihedsgrad kan (2-26) og (2-27) iht. (1-14) skrives

$$k_0(t) = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} F(x^0(t), y^0(t), t) - \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} p(x^0(t), y^0(t), t) \quad (2-26a)$$

$$c_0(t) = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial y} F(x^0(t), y^0(t), t) - \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial y} p(x^0(t), y^0(t), t) \quad (2-27a)$$

(2-25) er ækvivalent med den lineære ordinære differentialligning af 2. orden

$$\ddot{r}_1 + c_0(t)\dot{r}_1 + k_0(t)r_1 = 0 \quad (2-28)$$

Koefficienterne c_0 og k_0 er konstanter i tilfælde af ligevægtspunkter i autonome systemer, og periodiske funktioner af tiden i tilfælde af stabilitetsundersøgelser af uperturberede periodiske bevægelser. Mathieuligningen (2-8) er et specialtilfælde af (2-28).

2.2 Infinitesimal stabilitet af ligevægtspunkter i autonome systemer.

Variationsligningerne (2-23) bliver på matrixform

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 \quad (2-29)$$

hvor \mathbf{a} i dette tilfælde er en konstant koefficientmatrice.

Løsninger til (2-29) søges på formen

$$\mathbf{r}(t) = \text{Re}(\Phi e^{\lambda t}) \quad (2-30)$$

hvor Φ er en konstant vektor, og λ er en kompleks konstant. Af (2-29) og (2-30) findes

$$\forall t \geq 0: \text{Re}(\lambda \Phi e^{\lambda t}) = \mathbf{a} \text{Re}(\Phi e^{\lambda t}) \Rightarrow$$

$$(\mathbf{a} - \lambda \mathbf{E})\Phi = 0 \quad (2-31)$$

\mathbf{E} er enhedsmatricen.

Ikke-trivielle løsninger af typen (2-30) eksisterer da, hvis der eksisterer ikke-trivielle løsninger til det homogene ligningssystem (2-31). En nødvendig betingelse for dette er, at determinanten til koefficientmatricen er lig 0, dvs.

$$\det(\mathbf{a} - \lambda \mathbf{E}) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^m + A_1 \lambda^{m-1} + \dots + A_m = 0 \quad (2-32)$$

$A_1 = \text{tr}(\mathbf{a})$ og $A_m = \det(\mathbf{a})$. Alle invarianter A_i i (2-32) er reelle, fordi \mathbf{a} er en reel matrix.

Den karakteristiske ligning (2-32) har m løsninger $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, der udgør egenverdierne til \mathbf{a} . Det forudsættes, at der ikke eksisterer multiple egenverdier, svarende til at $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ alle er forskellige. For hver egenverdi λ_j , $j = 1, \dots, m$, eksisterer dermed en løsning $\Phi^{(j)}$, $j = 1, \dots, m$ til (2-31), og dermed et system af lineært uafhængige løsninger $Re(\Phi^{(j)} e^{\lambda_j t})$ til (2-29). Den fuldstændige løsning til (2-29) udgøres af en linearkombination af disse

$$\mathbf{r}(t) = c_1 Re(\Phi^{(1)} e^{\lambda_1 t}) + \dots + c_m Re(\Phi^{(m)} e^{\lambda_m t}) \quad (2-33)$$

Koefficienterne c_1, \dots, c_m er reelle og fastlægges ud fra begyndelsesbetingelserne $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$.

Egenverdierne λ_j er i almindelighed komplekse. Disse kan derfor skrives

$$\lambda_j = \mu_j + i\nu_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (2-34)$$

hvor μ_j og ν_j er reelle tal. Herved gives

$$e^{\lambda_j t} = e^{\mu_j t} (\cos \nu_j + i \sin \nu_j) \quad (2-35)$$

Af (2-35) følger, at addenden $Re(\Phi^{(j)} e^{\lambda_j t})$ i (2-33) er asymptotisk stabil, hvis $\mu_j < 0$, og instabil, hvis $\mu_j > 0$. Heraf gives følgende betingelser for infinitesimal stabilitet af et ligevægtspunkt i et autonomt system:

1. Ligevægtspunktet er asymptotisk stabilt, hvis det for alle egenverdier til matricen \mathbf{a} gælder, at disse har negativ realdel, dvs. hvis $\forall \lambda_i : Re(\lambda_i) < 0$.
2. Ligevægtspunktet er instabilt, hvis blot en egenverdi har positiv realdel, dvs. hvis $\exists \lambda_i : Re(\lambda_i) > 0$.

Hvis en eller flere egenverdier opfylder betingelsen $Re(\lambda_i) = 0$, samtidig med de øvrige egenverdier har negativ realdel, kan stabiliteten ikke afgøres ved en infinitesimal analyse, men må baseres på den eksakte perturberede differentiaalligning (2-15), eller, hvis de nødvendige differentiabilitetsegenskaber er tilstede, på en højere ordens Taylorudvikling i stil med (2-22).

Man kan vise, at hvis variationsligningssystemet (2-23) er asymptotisk stabilt eller instabilt, er også det eksakte perturberede differentiaalligningssystem (2-15) asymptotisk stabilt eller instabilt. Systemer, hvor stabiliteten kan afgøres udelukkende ud fra variationsligningssystemet stabilitetsegenskaber, siges at besidde *signifikant opførsel*. Systemer, for hvilke en eller flere egenverdier opfylder betingelsen $Re(\lambda_i) = 0$, samtidig med at øvrige egenverdier har negativ realdel, siges at besidde *kritisk opførsel*.

En infinitesimal stabilitetsanalyse indebærer dermed, at man skal opstille og løse den karakteristiske ligning (2-32) for hvert eneste ligevægtspunkt, som systemet besidder. Dette volder ingen problemer for små værdier af m , men bliver et reelt numerisk problem for mere komplekse systemer. I dette tilfælde kan man

have nytte af det såkaldte *Routh-Hurwitz kriterie*, der angiver en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for om rødderne til (2-32) alle besidder negativ realdel, og ligevægtpunktet derfor er asymptotisk stabilt.

Ud fra koefficienterne A_1, \dots, A_m i (2-31) dannes matricen

$$\begin{bmatrix} A_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 & 1 & \dots & 0 \\ A_5 & A_4 & A_3 & A_2 & \dots & 0 \\ A_7 & A_6 & A_5 & A_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_m \end{bmatrix}$$

Det bemærkes, at koefficienterne i matricens hoveddiagonal udgøres af A_1, A_2, \dots, A_m .

Dernæst dannes følgende system af underdeterminanter af stadig voksende orden

$$D_1 = A_1, D_2 = \begin{vmatrix} A_1 & 1 \\ A_3 & A_2 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} A_1 & 1 & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 \\ A_5 & A_4 & A_3 \end{vmatrix}, \dots, D_m = A_m D_{m-1} \quad (2-36)$$

Routh-Hurwitz kriteriet udsiger da, at den nødvendige og tilstrækkelige betingelse for at alle rødder λ_i til den karakteristiske ligning (2-32) har negativ realdel er, at samtlige underdeterminanter D_1, D_2, \dots, D_m givet ved (2-36) er positive. For et bevis for kriteriet henvises til Chetayev [3].

Eksempel 2-4: Stabilitet af autonom Duffing oscillator med blød fjeder.

Betragt bevægelsesligningen for en lineær viskos dæmpet Duffing oscillator med blød fjeder, jvf. (2-6).

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) = 0, \quad \zeta > 0, \quad \omega_0 > 0 \quad (2-37)$$

Ligevægtpunkter er

$$\begin{aligned} y^0 = 0 \quad \wedge \quad -2\zeta\omega_0 y^0 - \omega_0^2 x^0 \left(1 - \left(\frac{x^0}{a}\right)^2\right) &= 0 \Rightarrow \\ (y^0 = 0 \wedge x^0 = 0) \quad \vee \quad (y^0 = 0 \wedge x^0 = \pm a) & \end{aligned} \quad (2-38)$$

For ligevægtpunktet $(x^0, y^0) = (0, 0)$ indsættes $x = x^0 + r_1 = r_1$ i (2-37). Efter linearisering opnås følgende lineære ordinære differentiaalligning af 2. orden i perturbationen r_1 , gyldig i omegnen af $x = x^0 = 0$

$$\ddot{r}_1 + 2\zeta\omega_0\dot{r}_1 + \omega_0^2 r_1 = 0 \quad (2-39)$$

Den til (2-39) hørende karakteristiske ligning bliver da

$$\lambda^2 + A_1\lambda + A_2 = 0, \quad A_1 = 2\zeta\omega_0, \quad A_2 = \omega_0^2 \quad (2-40)$$

Af (2-36) følger, at underdeterminanterne bliver

$$D_1 = 2\zeta\omega_0 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2\zeta\omega_0 & 1 \\ 0 & \omega_0^2 \end{vmatrix} = 2\zeta\omega_0^3 > 0 \quad (2-41)$$

Da begge underdeterminanter er positive, slutes af Routh-Hurwitz kriteriet, at begge egenverdier til (2-40) har negativ realdel, og ligevægtspunktet $(x^0, y^0) = (0, 0)$ derfor er asymptotisk stabil.

For ligevægtspunkterne $(x^0, y^0) = (\pm a, 0)$ findes på tilsvarende måde ved indsættelse af $x = x^0 + r_1 = \pm a + r_1$ følgende lineariserede differentiaalligning for perturbationen

$$\ddot{r}_1 + 2\zeta\omega_0\dot{r}_1 - 2\omega_0^2 r_1 = 0 \quad (2-42)$$

Den tilhørende karakteristiske ligning bliver

$$\lambda^2 + A_1\lambda + A_2 = 0, \quad A_1 = 2\zeta\omega_0, \quad A_2 = -2\omega_0^2 \quad (2-43)$$

De tilhørende underdeterminanter bliver

$$D_1 = 2\zeta\omega_0 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2\zeta\omega_0 & 1 \\ 0 & -2\omega_0^2 \end{vmatrix} = -4\zeta\omega_0^2 < 0 \quad (2-44)$$

Da $D_2 < 0$, kan slutes, at mindst en af rødderne til (2-44) har ikke-negativ realdel. Som det let ses af (2-43) vil begge egenverdier i dette tilfælde være reelle, den ene positiv og den anden negativ, svarende til at ligevægtspunkterne er sadelpunkter, se afsnit 2.6.

I resten af dette afsnit vil vi beskæftige os med tilfældet $m=2$, der har relevans ved svingninger af et system af 1 frihedsgrad uden hysteres. (2-29) bliver i dette tilfælde

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r_1(0) \\ r_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1,0} \\ r_{2,0} \end{bmatrix} \quad (2-45)$$

Den karakteristiske ligning (2-32) bliver

$$\det \left(\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) + \sqrt{\frac{1}{4}(a_{11} - a_{22})^2 + a_{12}a_{21}} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) - \sqrt{\frac{1}{4}(a_{11} - a_{22})^2 + a_{12}a_{21}} \end{aligned} \right\} \quad (2-46)$$

Med denne formulering er $Re(\lambda_1) \geq Re(\lambda_2)$. Ligevægtpunktet er da asymptotisk stabilt, hvis $Re(\lambda_1) < 0$ og instabilt, hvis $Re(\lambda_2) > 0$.

For systemet beskrevet ved (2-2) gælder, at eventuelle ligevægtpunkter i faseplanen er beliggende på x-aksen ($y=0$).

Hældningskoefficienten for trajektorierne kan bestemmes ved at dividere den første ligning (2-2) op i den anden ligning. Herved

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x, y, t)}{y} \quad (2-47)$$

Udenfor ligevægtpunkterne, bestemt ved $f_2(x, 0, t) = 0$, må trajektorierne derfor skære x-aksen ($y=0$) under rette vinkler.

Ved et lignende argument ses, at trajektorier for det pertuberede system (2-45) vil skære r_1 -aksen under ikke-rette vinkler, hvis $a_{11} \neq 0$. Det kvalitative trajektorieforløb for de forskellige typer af ligevægtpunkter er dog i det følgende optegnet for perturbationer af systemet (2-2), da alle i praksis forekommende bevægelsesligninger for $m=2$ er af denne type.

Med henblik på at undersøge forløbet af trajektorierne i omegnen af $\mathbf{r} = 0$, indføres betegnelserne

$$\left. \begin{aligned} p &= (a_{11} + a_{22}) = tr(\mathbf{a}) \\ q &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = det(\mathbf{a}) \end{aligned} \right\} \quad (2-48)$$

Herved kan (2-46) skrives

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}(p + \sqrt{p^2 - 4q}) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(p - \sqrt{p^2 - 4q}) \end{aligned} \right\} \quad (2-49)$$

Ud fra fortegnet af realdelen af λ_1 sluttet umiddelbart, at systemet har signifikant opførsel i følgende tilfælde

$$\left. \begin{aligned} p < 0 \wedge q > 0 &: \text{Asymptotisk stabilitet} \\ p > 0 \vee q < 0 &: \text{Instabilitet} \end{aligned} \right\} \quad (2-50)$$

Den videre undersøgelse deles i 3 dele, afhængig af den indbyrdes størrelsesorden af p^2 og $4q$.

1. $p^2 > 4q$

Begge egenværdier er i dette tilfælde reelle og forskellige. Herved bliver også egenvektorerne $\Phi^{(1)}$ og $\Phi^{(2)}$ til (2-31) reelle. Løsningen (2-33) kan derved skrives

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \Phi^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \Phi^{(2)} e^{\lambda_2 t} \quad (2-51)$$

Initialperturbationen for $t = 0$ er givet ved

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} r_{1,0} \\ r_{2,0} \end{bmatrix} = c_1 \Phi^{(1)} + c_2 \Phi^{(2)} \quad (2-52)$$

Lad l_1 og l_2 betegne rette linier gennem origo, parallelle med henholdsvis $\Phi^{(1)}$ og $\Phi^{(2)}$. Disse linier har parameterfremstillingen

$$l_i : \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = c_i \Phi^{(i)} \quad , \quad c_i \in R \quad , \quad i = 1, 2 \quad (2-53)$$

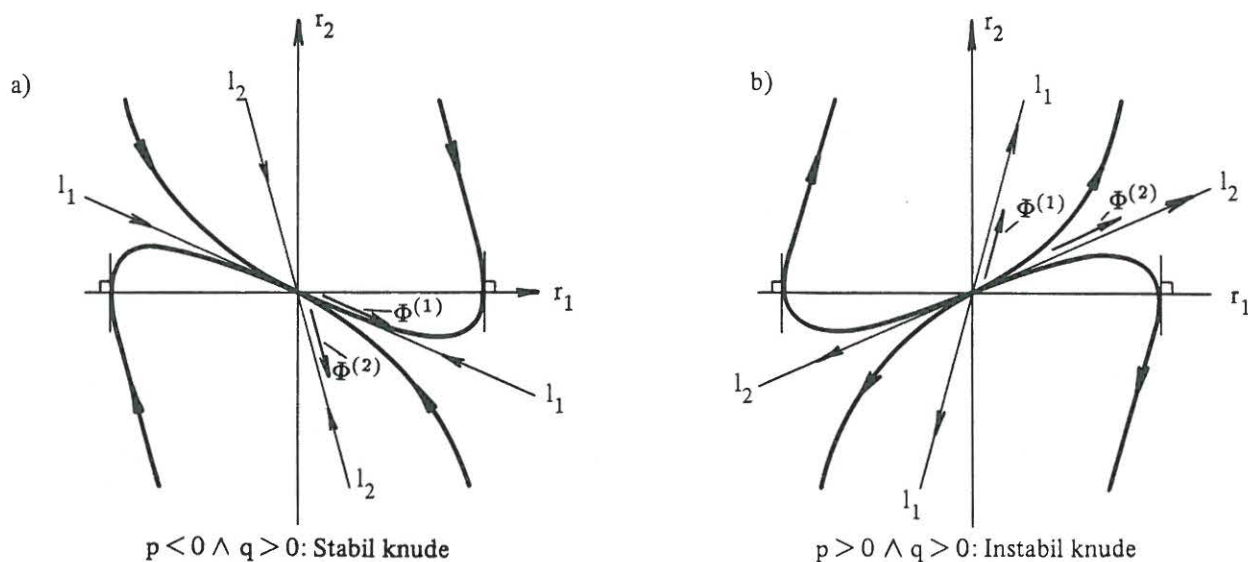
En initialperturbation \mathbf{r}_0 beliggende på l_1 er da karakteriseret ved, at $c_2 = 0$. Af (2-51) følger da, at bevægelsen er givet ved $\mathbf{r}(t) = c_1 \Phi^{(1)} e^{\lambda_1 t}$. Trajektorien for denne bevægelse udgøres dermed af linien l_1 . Tilsvarende ses, at trajektorien for bevægelser, der starter på l_2 , udgøres af linien l_2 .

Undersøgelsen $p^2 > 4q$ underopdeles nu i 3 dele

1.1 $p < 0 \wedge q > 0$

1.2 $p > 0 \wedge q > 0$

1.3 $q < 0$ og vilkårligt p



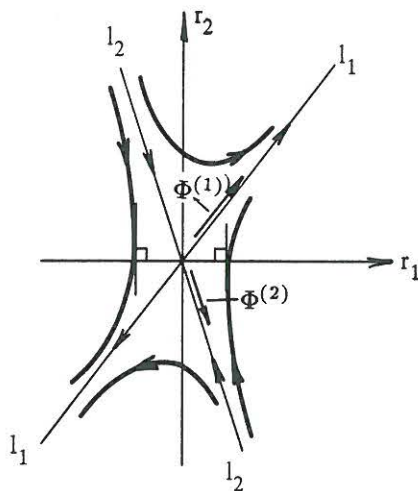
Figur 2.5. Trajektorier for $p^2 > 4q$. Uægte knuder.

1.1 $p < 0 \wedge q > 0$

Begge egenverdier er negativt reelle, dvs. $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Ligevægtpunktet er dermed asymptotisk stabilt. For $t \rightarrow \infty$ dominerer det første led på højresiden af (2-51), dvs. man har det asymptotiske forløb $\mathbf{r}(t) \simeq c_1 \Phi^{(1)} e^{\lambda_1 t}$. Bortset fra trajektorien på l_2 , nærmer alle trajektorier sig følgelig origo langs l_1 . For $t \rightarrow -\infty$ vil det sidste led på højresiden af (2-51) dominere. Trajektorierne starter da alle med at være parallelle med l_2 . Ligevægtpunktet betegnes en *stabil knude*. Trajektoriesystemet er skitseret på figur 2.5a.

1.2 $p > 0 \wedge q > 0$

Begge egenverdier er positivt reelle, dvs. $0 < \lambda_2 < \lambda_1$. Ligevægtpunktet er dermed instabilt. For $t \rightarrow -\infty$ dominerer det sidste led på højresiden af (2-51), dvs. man har det asymptotiske forløb $\mathbf{r}(t) \simeq c_2 \Phi^{(2)} e^{\lambda_2 t}$. Bortset fra trajektorien på l_1 , udgår alle trajektorier fra origo langs l_1 . For $t \rightarrow \infty$ vil det første led på højresiden af (2-51) dominere. Trajektorierne ender da alle med at være parallelle med l_1 . Ligevægtpunktet betegnes en *instabil knude*. Trajektoriesystemet er skitseret på figur 2.5b.

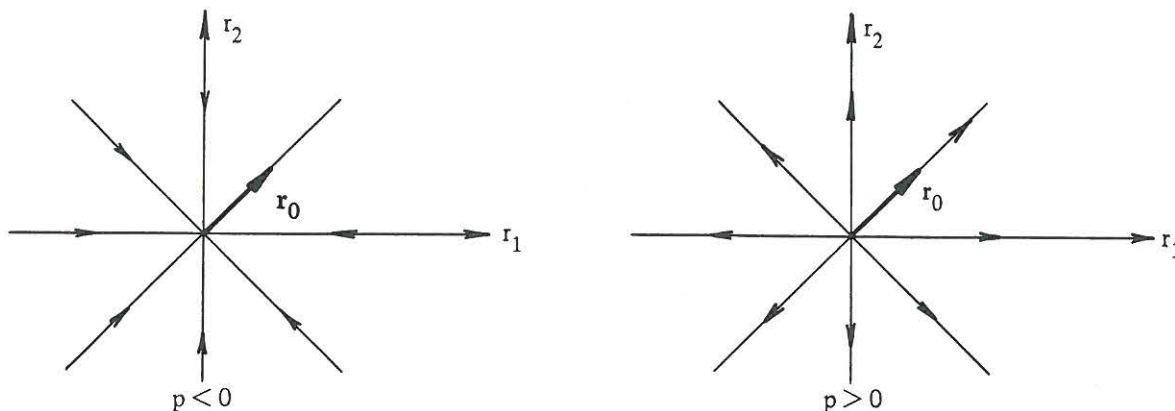
1.3 $q < 0$, vilkårligt p 

Figur 2.6. Trajektorier for $q < 0$. Saddelpunkt.

Egenverdierne er reelle og har modsat fortegn, dvs. $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Ligevægtpunktet er dermed instabilt. For bevægelser, der startes på l_2 gælder $r_1(t) = c_2 \Phi^{(2)} e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$. Bevægelser, der starter på l_1 er derimod instabile for $t \rightarrow \infty$. For $t \rightarrow \infty$ haves det asymptotiske forløb $\mathbf{r}(t) \simeq c_1 \Phi^{(1)} e^{\lambda_1 t}$. Bortset fra trajektorien på l_2 , vil samtlige trajektorier derfor nærme sig asymptotisk til l_1 for $t \rightarrow \infty$. For $t \rightarrow -\infty$ haves tilsvarende det asymptotiske forløb $\mathbf{r}(t) \simeq c_2 \Phi^{(2)} e^{\lambda_2 t}$.

Bortset fra trajektorien på l_1 , vil samtlige trajektorier følgelig nærme sig asymptotisk til l_2 for $t \rightarrow -\infty$. Ligevægtpunktet betegnes et *saddelpunkt*. Trajektorie-systemet for dette er skitseret på figur 2.6.

2. $p^2 = 4q$



Figur 2.7: Trajektorier for $p^2 = 4q$. Ægte knuder.

Rødderne er reelle og lige store, dvs. $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}p$. Ligevægtpunktet er dermed asymptotisk stabilt for $p > 0$ og instabilt for $p < 0$. Af (2-51) følger $\mathbf{r}(t) = (c_1 \Phi^{(1)} + c_2 \Phi^{(2)})e^{\lambda_1 t} = \mathbf{r}_0 e^{\lambda_1 t}$. Alle trajektorier er dermed rette linier gennem den initiale perturbation, som vist på figur 2.7. Ligevægtpunktet betegnes en *ægte knude*, fordi passagen til og fra ligevægtpunktet kan ske i vilkårligt mange retninger. I modsætning hertil sker passagen til og fra ligevægtpunktet for knuderne på figur 2.5 altid langs enten l_1 eller l_2 . Disse knuder betegnes *uægte knuder*.

3. $p^2 < 4q$

Egenverdierne er i dette tilfælde hinandens kompleks konjugerede, og skrives på formen

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array} \right\} = \mu \pm i\nu \quad (2-54)$$

$$\mu = \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) \quad (2-54a)$$

$$\nu = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2} = \sqrt{a_{12}a_{21} - \frac{1}{4}(a_{11} - a_{22})^2} \quad (2-54b)$$

Herved kan løsningen (2-33) skrives

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= c_1 \operatorname{Re}(\Phi^{(1)} e^{\mu t} (\cos \nu t + i \sin \nu t)) \\ &+ c_2 \operatorname{Re}(\Phi^{(2)} e^{\mu t} (\cos \nu t - i \sin \nu t)) \\ &= e^{\mu t} ((c_1 \operatorname{Re}(\Phi^{(1)}) + c_2 \operatorname{Re}(\Phi^{(2)})) \cos \nu t \\ &+ e^{\mu t} ((-c_1 \operatorname{Im}(\Phi^{(1)}) + c_2 \operatorname{Im}(\Phi^{(2)})) \sin \nu t \\ &= e^{\mu t} (\mathbf{b}_1 \cos \nu t + \mathbf{b}_2 \sin \nu t) \end{aligned} \quad (2-55)$$

Af (2-45) følger $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{a} \mathbf{r}_0$. Heraf findes

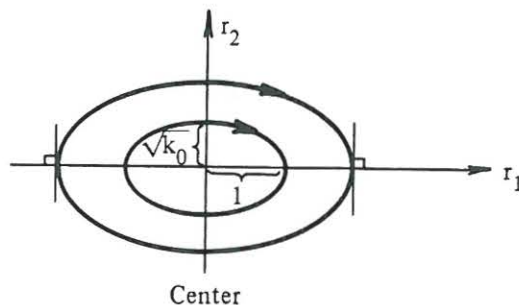
$$\left. \begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{b}_2 &= \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\nu} (\dot{\mathbf{r}}(0) - \mu \mathbf{b}_1) = \frac{1}{\nu} (\mathbf{a} - \mu \mathbf{E}) \mathbf{r}_0 \end{aligned} \right\} \quad (2-56)$$

Undersøgelsen deles nu i tilfældene

$$3.1 \quad \mu = 0 \Leftrightarrow p = 0$$

$$3.2 \quad \mu \neq 0$$

$$3.1 \quad \mu = 0$$



Figur 2.8. Trajektorier for $p = 0 \wedge q > 0$. Center.

I henhold til (2-55) bliver bevægelsen periodisk med perioden $T = \frac{2\pi}{\nu}$, hvorfor trajektorierne må være lukkede kurver. Ligevægtspunktet er stabil, da vi til ethvert $\varepsilon > 0$ kan vælge et $\delta > 0$, således at $|\mathbf{r}_0| < \delta$ medfører, at $\mathbf{r}(t)$ i al fremtid forløber indenfor en ε -omegn af $\mathbf{r} = 0$. Dette følger af, at vektorerne \mathbf{b}_1 og \mathbf{b}_2 , der fastlægger udstrækningen af den lukkede trajektorie, i henhold til (2-56) er lineære funktioner af \mathbf{r}_0 , hvorfor $|\mathbf{b}_1|$ og $|\mathbf{b}_2|$ kan gøres vilkårligt små ved at vælge \mathbf{r}_0 passende tæt på $\mathbf{r} = 0$.

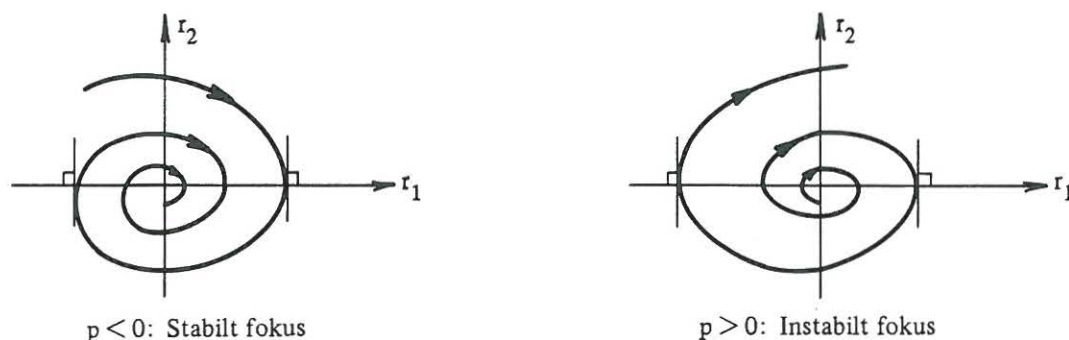
(2-55) løses mht. $\cos \nu t$ og $\sin \nu t$

$$\begin{bmatrix} \cos \nu t \\ \sin \nu t \end{bmatrix} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \quad b = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \Rightarrow$$

$$(b_{22}^2 + b_{21}^2)r_1^2 - 2(b_{11}b_{21} + b_{22}b_{12})r_1r_2 + (b_{11}^2 + b_{12}^2)r_2^2 = b^2 \quad (2-57)$$

(2-57) repræsenterer et keglesnit. Da trajektorien er lukket, må (2-57) da være en ellipse med centrum i $\mathbf{r} = 0$. I almindelighed ($a_{11} \neq 0$) er hovedakseretningerne forskellige fra r_1 - og r_2 -retninger, hvorimod disse er sammenfaldende i tilfælde af det specielle system (2-2), se eksempel 2.5. Ligevægtspunktet betegnes et *center*. Trajektoriesystemet for dette er skitseret på figur 2.8. Den anførte omløbsretning i faseplanen er altid gældende for det specielle system (2-2), hvor $a_{11} = 0 \wedge a_{12} = 1$. Rigtigheden af denne påstand indses ved eksempelvis at betragte skæringspunktet mellem en vilkårlig trajektorie og den positive r_2 -akse. I dette punkt er $r_1 = 0 \wedge r_2 = \dot{r}_1 > 0$. Betingelsen $\dot{r}_1 > 0$ indebærer da, at systemet må bevæge sig i retning af voksende værdier af r_1 , svarende til den anførte omløbsretning.

3.2 $\mu \neq 0$



Figur 2.9. Trajektorier for $p^2 < 4q$.

(2-55) er asymptotisk stabil for $\mu < 0$ og instabil for $\mu > 0$. Trajektorierne kan i dette tilfælde opfattes som ellipser, hvis halvaksler ændres i tiden som følge af faktoren $e^{\mu t}$. Disse er skitseret på figur 2.9. Ligevægtspunktet betegnes et *stabilt focus*, når $p = 2\mu < 0$, og et *instabilt focus*, når $p > 0$.

Resultatet af den gennemførte analyse kan samles i følgende skema:

$p > 0 \vee q < 0$: Instabilt ligevægtspunkt
$p < 0 \wedge q > 0$: Asymptotisk stabilt ligevægtspunkt
$p < 0 \wedge q > 0 \wedge p^2 > 4q$: Stabil uægte knude
$p > 0 \wedge q > 0 \wedge p^2 > 4q$: Instabil uægte knude
$q < 0$, vilkårligt p	: Saddelpunkt
$p < 0 \wedge p^2 = 4q$: Stabil ægte knude
$p > 0 \wedge p^2 = 4q$: Instabil ægte knude
$p = 0 \wedge q > 0$: Center
$p < 0 \wedge p^2 < 4q$: Stabilt focus
$p > 0 \wedge p^2 < 4q$: Instabilt focus

Eksempel 2.5: Stabilitet af ligevægtspunkter af autonomt system af 1 frihedsgrad.

For et autonomt system med 1 frihedsgrad af typen (2-2) findes ved (2-25), (2-48), (2-49)

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{c_0}{2} + \sqrt{\frac{c_0^2}{4} - k_0} \\ \lambda_2 &= -\frac{c_0}{2} - \sqrt{\frac{c_0^2}{4} - k_0} \end{aligned} \right\} \quad (2-58)$$

$$\Phi^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (2-59)$$

$$p = -c_0, \quad q = k_0 \quad (2-60)$$

Vi får herved følgende stabilitetsegenskaber udtrykt ved c_0 og k_0 :

$c_0 < 0 \vee k_0 < 0$: Instabilt ligevægtspunkt
$c_0 > 0 \wedge k_0 > 0$: Asymptotisk stabilt ligevægtspunkt
$c_0 > 0 \wedge k_0 > 0 \wedge c_0^2 > 4k_0$: Stabil uægte knude
$c_0 < 0 \wedge k_0 > 0 \wedge c_0^2 > 4k_0$: Instabil uægte knude
$k_0 < 0$, vilkårligt c_0	: Saddelpunkt
$c_0 > 0 \wedge c_0^2 = 4k_0$: Stabil ægte knude
$c_0 < 0 \wedge c_0^2 = 4k_0$: Instabil ægte knude
$c_0 = 0 \wedge k_0 > 0$: Center
$c_0 > 0 \wedge c_0^2 < 4k_0$: Stabilt focus
$c_0 < 0 \wedge c_0^2 < 4k_0$: Instabilt focus

k_0 og c_0 antages givet ved (2-26a), (2-27a). Disse udtryk specialiseres i det følgende yderligere, svarende til den ydre belastning ikke antages selvinduceret (dvs. $p = p(t)$), og tilbageføringskraften antages givet ved (1-26).

Herved gives

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= \frac{1}{m} \left(\frac{\partial}{\partial x} g(x^0, y^0) + \frac{d^2 U}{dx^2} \Big|_{x=x^0} \right) \\ c_0 &= \frac{1}{m} \left(\frac{\partial}{\partial y} g(x^0, y^0) \right) \end{aligned} \right\} \quad (2-61)$$

For et konservativt system, hvor $g(x, y) \equiv 0$, følger specielt

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= \frac{1}{m} \frac{d^2 U}{dx^2} \Big|_{x=x^0} \\ c_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-62)$$

Af det ovenfor anførte skema følger da, at ligevægtspunkter ($\frac{dU}{dx} \Big|_{x=x_0} = 0$) i et konservativt autonomt system af 1. frihedsgrad uden hysterese frihedsgrader enten er centre ($\frac{d^2 U}{dx^2} \Big|_{x=x_0} > 0$) eller saddelpunkter ($\frac{d^2 U}{dx^2} \Big|_{x=x_0} < 0$). Systemet har kun signifikant opførsel i saddelpunkter.

I saddelpunkter antager (2-59) formen

$$\Phi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{-k_0} \end{bmatrix}, \quad \Phi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{-k_0} \end{bmatrix} \quad (2-63)$$

I centre antager (2-59) formen

$$\Phi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ i\sqrt{k_0} \end{bmatrix}, \quad \Phi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{k_0} \end{bmatrix} \quad (2-64)$$

Herved bliver vektorerne b_1 og b_2 i (2-55)

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= c_1 \operatorname{Re}(\Phi^{(1)}) + c_2 \operatorname{Re}(\Phi^{(2)}) = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ b_2 &= -c_1 \operatorname{Im}(\Phi^{(1)}) + c_2 \operatorname{Im}(\Phi^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{k_0}(c_1 + c_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2-65)$$

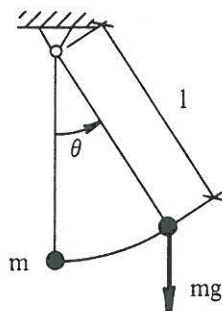
Herved kan (2-57) skrives

$$k_0(c_1 + c_2)^2 r_1^2 + (c_1 + c_2)^2 r_2^2 = k_0(c_1 + c_2)^4 \Rightarrow$$

$$\frac{r_1^2}{(c_1 + c_2)^2} + \frac{r_2^2}{k_0(c_1 + c_2)^2} = 1 \quad (2-66)$$

Det indses, at $\Phi^{(1)}$ og $\Phi^{(2)}$ vil have strukturen (2-64) for centre i forbindelse med (2-2), også når tilbageføringskraften evt. er ikke-konservativ. Herved får b_1 og b_2 strukturen (2-65), og trajektorierne er givet ved (2-66). Dette repræsenterer ellipser med hovedretninger sammenfaldende med r_1 - og r_2 -aksen, som skitseret på figur 2.8.

Eksempel 2-6: Stabilitet af ligevægtspunkter af dæmpningsfrit matematisk pendul.



Figur 2-10: Dæmpningsfrit matematisk pendul.

Der ses bort fra friktionsmomentet i ophænget og luftmodstanden mod pendulets bevægelse. Stangen af længden l antages masseløs og uendelig stiv. Pendulets bevægelsesligning følger da af impulsmomentsætningen opstillet om ophængspunktet

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l} \quad (2-67)$$

Tilbageføringskraften i (2-67) kan skrives

$$F(\theta) = \frac{d}{d\theta} U(\theta) \quad (2-68)$$

$$U(\theta) = \omega_0^2(1 - \cos\theta) \quad (2-69)$$

Pendulet kan herved karakteriseres som et ikke-lineært, autonomt system med konservativ tilbageføringskraft. Ikke-lineariteten er af geometrisk type. Da $(\sin\theta < \theta, 0 < \theta < \pi) \wedge (\sin\theta > \theta, -\pi < \theta < 0)$, er fjederen blød.

Med $x = \theta$ og $y = \dot{\theta}$ er ligevægtspunkterne givet ved

$$\omega_0^2 \sin x_0 = 0 \wedge y_0 = 0 \Rightarrow$$

$$x_0 = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots \wedge y_0 = 0 \quad (2-70)$$

Af (2-62) følger

$$k_0 = \frac{d^2 U}{dx^2} \Big|_{x=x_0} = \omega_0^2 \cos x_0$$

$$= \begin{cases} \omega_0^2, & x_0 = 0, \pm2\pi, \pm4\pi, \dots \\ -\omega_0^2, & x_0 = \pm\pi, \pm3\pi, \dots \end{cases} \quad (2-71)$$

$$c_0 = 0 \quad (2 - 72)$$

I henhold til eksempel 2-5, svarer ligevægtspunkterne $x_0 = \pm\pi, \pm3\pi, \dots$, hvor $k_0 = -\omega_0^2 < 0$ da til saddepunkter. Fysisk svarer dette til ligevægtstilstande, hvor pendulet står i øvre ligevægtstilstand.

Ligevægtspunkterne $x_0 = 0, \pm2\pi, \pm4\pi, \dots$, hvor $k_0 = \omega_0^2 > 0$, svarer til centre. Fysisk svarer dette til ligevægtstilstande, hvor pendulet hænger nedad.

2.3 Egensvingninger af konservative systemer. Bevægelser i det store.

I det foregående afsnit betragtedes trajektorieforløbet i omegnen af et singulært punkt. Sådanne bevægelser betegnes *bevægelser i det små*. I modsætning hertil betegnes bevægelser i vilkårlig afstand fra ligevægtspunkterne som *bevægelser i det store*. At bestemme disse indebærer at bestemme hele faseportrættet.

Vi skal indskrænke os til at betragte egensvingninger af systemer med konservative tilbageføringskræfter. For $p_i \equiv 0$ og ved anvendelse af (1-22) antager (1-2) formen

$$m_i \ddot{x}_i + \frac{\partial}{\partial x_i} U(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (2 - 73)$$

Ligningerne (2-73) ganges med dx_i , hvorefter alle ligninger adderes. Herved findes

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(d \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} U(x_1, \dots, x_n) dx_i \right) &= 0 \Rightarrow \\ d \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 + U(x_1, \dots, x_n) \right) &= 0 \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 + U(x_1, \dots, x_n) &= E = \text{konstant} \end{aligned} \quad (2 - 74)$$

(2-74) udtrykker, at summen af potentiel og kinitisk energi er konstant i et konservativt system. Konstanten E repræsenterer systemets mekaniske energi.

Indføres tilstandsvariablerne $y_i = \dot{x}_i$, kan (2-74) skrives

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i y_i^2 + U(x_1, \dots, x_n) = E = \text{konstant} \quad (2 - 75)$$

For hver værdi af E angiver (2-75) ligningen for en bestemt hyperplan i faserummet. Trajektorier med mekanisk energi E er beliggende på denne hyperplan.

I resten af dette afsnit vil vi specielt analysere et system af 1 frihedsgrad, i hvilket tilfælde (2-75) antager formen

$$\frac{1}{2}my^2 + U(x) = E \Rightarrow$$

$$y = y(x, E) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \quad (2-76)$$

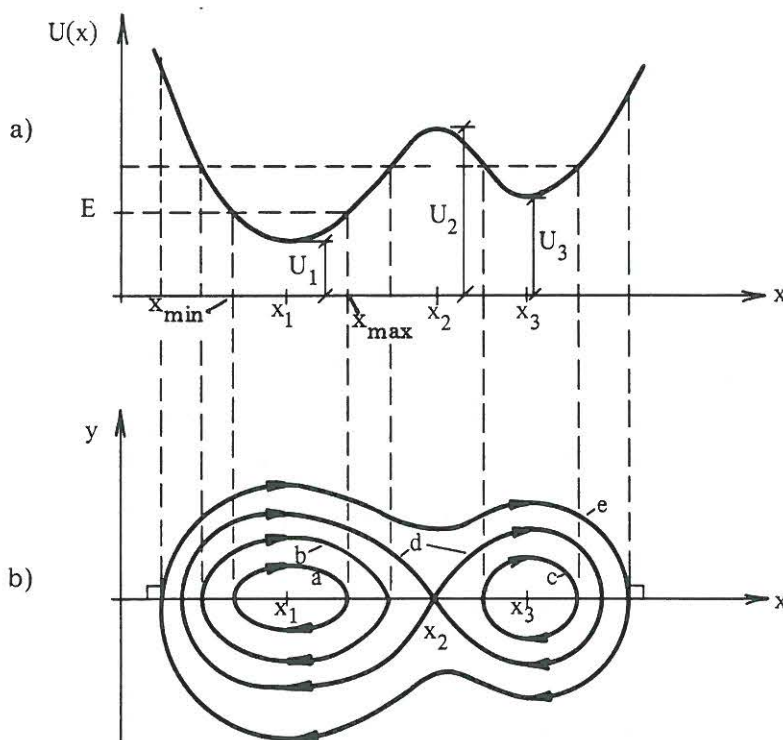
Det fremgår af (2-76), at trajektorierne ved egensvingninger i et konservativt system er symmetrisk om x -aksen. Lignende symmetriegenskaber gælder for n -frihedsgraderssystemet (2-75).

Ligevægtspunkter er givet ved

$$y_0 = 0 \wedge F(x_0) = \frac{dU}{dx} \big|_{x=x_0} = 0 \quad (2-77)$$

Som vist i eksempel 2-5 vil ligevægtspunkterne enten være centre $\left(\frac{d^2U}{dx^2} \big|_{x=x_0} > 0\right)$ eller saddelpunkter $\left(\frac{d^2U}{dx^2} \big|_{x=x_0} < 0\right)$.

Opfattes E som en 3 koordinat, hvor E -aksen er vinkelret på (x, y) -planen, kan integralkurverne (2-76) fortolkes som skæringskurven mellem fladen $E(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + U(x)$ og planen $E = \text{konstant}$.



Figur 2-11: a) Potentiel energikurve. b) Faseportræt.

Figur 2-11a viser grafen for $U(x)$. Abscisserne x_1, x_2, x_3 , er ligevægtspunkter, da der her gælder $\frac{dU}{dx} = 0$. De tilsvarende ordinatværdier af den potentielle energi er U_1, U_2, U_3 , hvis indbyrdes størrelse fremgår af figuren.

Ligevægtspunkterne x_1 og x_3 svarer til lokale minima af $U(x)$. I disse punkter er $\frac{d^2U}{dx^2} > 0$, hvorfor ligevægtspunkterne er centre. Generelt gælder åbenbart, at lokale minima på den potentielle energikurve svarer til centre.

Ligevægtspunktet x_2 svarer til et lokalt maximum af $U(x)$. I et sådant punkt er $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$, hvorfor ligevægtspunktet er et saddelpunkt. Generelt gælder, at lokale maxima på den potentielle energikurve svarer til saddelpunkter.

Vi betragter nu trajektorierne kvalitative forløb, i takt med energiparameteren ændres gradvist fra 0 til ∞ .

For $E < U_1$ eksisterer der ingen reel løsning til (2-76), hvorfor ingen bevægelse med mekanisk energi $E < U_1$ er mulig.

For $E = U_1$ opstår som eneste mulige bevægelse den konstante bevægelse $x = x_1$.

For $U_1 < E < U_3$ eksisterer periodiske bevægelser om centret $(x, y) = (x_1, 0)$, der antager værdier i intervallet $[x_{\min}, x_{\max}]$. På figur 2-11b repræsenterer kurve *a* trajektorien for en sådan periodisk bevægelse.

For $E = U_3$ eksisterer der fortsat en periodisk bevægelse om x_1 . Herudover er der mulighed for den konstante bevægelse $x = x_3$.

For $U_3 < E < U_2$ eksisterer periodiske bevægelser om centrene i $(x, y) = (x_1, 0)$ og $(x, y) = (x_3, 0)$. Hvilken af disse 2 periodiske bevægelser, der bliver gældende, afhænger af konstruktionens begyndelsesflytning x_0 . For store værdier af x_0 må bevægelsen forløbe om $(x_3, 0)$, mens bevægelsen i tilfælde af relativt små værdier af x_0 forløber om $(x, y) = (x_1, 0)$.

På figur 2-11b repræsenterer kurverne *b* og *c* trajektorierne for periodiske bevægelser med samme energiindhold om $(x_1, 0)$ og $(x_3, 0)$.

For $E = U_2$ fremkommer en grænsekurve, en såkaldt *separatrix*, der adskiller de periodiske bevægelser om $(x_1, 0)$ og $(x_3, 0)$. Separatrixen er vist som kurve *d*, på figur 2-11b. Trajektorieforløbet omkring saddelpunktet $(x_2, 0)$ genkendes fra figur 2-6.

For $E > U_2$ bliver trajektorierne igen lukkede, svarende til periodiske bevægelser. Trajektorien omslutter nu 2 centre og et saddelpunkt. På figur 2-11b repræsenterer kurve *e* trajektorien for en sådan periodisk bevægelse.

Det fremgår af den foretagne gennemgang, at det kvalitative forløb af faseportrættet, og hermed af bevægelsen i det store, kan konstrueres udelukkende ud fra den potentielle energikurve.

De lokale ekstremer af $U(x)$ må skiftevis være lokale minimums- og lokale maksimumspunkter. Heraf følger, at centre på x -aksen må adskilles af saddelpunkter.

Ved en generalisering af betragtningerne i forbindelse med figur 2-11b indser man:

Trajektorier for periodiske bevægelser ved egensvingninger af konservative systemer omslutter altid et ulige antal ligevægtspunkter af centre og saddepunkter. Antallet af centre er altid 1 større end antallet af saddepunkter.

Der gælder, at trajektorierne ved egensvingninger af konservative systemer er orbitalt stabile, men ikke asymptotisk orbitalt stabile.

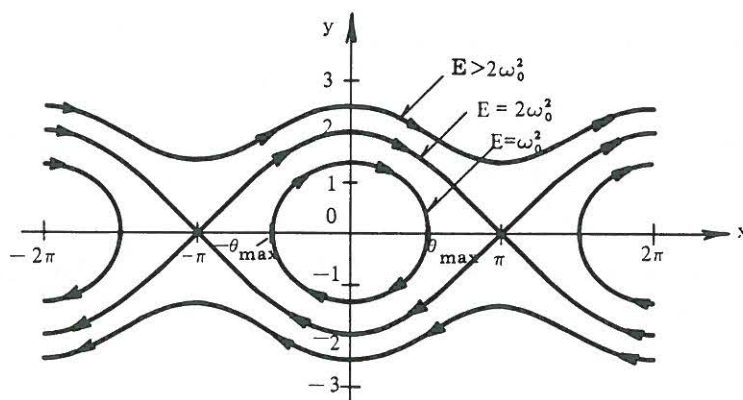
Perioden T i den periodiske bevægelse findes ved (2-76).

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \Rightarrow \\ dt &= \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \Rightarrow \\ T &= 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \quad (2-78)\end{aligned}$$

Vi har her benyttet, at trajektorierne er symmetrisk om x -aksen. x_{\min} og x_{\max} er defineret på figur 2-11b.

Det bemærkes, at egensvingningstiden T for ikke-lineære systemer i almindelighed afhænger af amplituden $\frac{1}{2}(x_{\max} - x_{\min})$. Dette er kvalitativt forskelligt fra forholdene ved lineære systemer.

Eksempel 2-7: Faseportræt for dæmpningsfrit matematisk pendul.



Figur 2-12: Egensvingninger af matematisk pendul. Faseportræt.

For det matematiske pendul i eksempel 2-6 er den potentielle energi givet ved (2-69). Med $x = \theta$, $y = \dot{\theta}$, $m = 1$, antager (2-76) herved formen

$$y = \pm \sqrt{2(E - \omega_0^2(1 - \cos x))} \quad (2-79)$$

Separatrixer opstår for $E = \max(U(x)) = 2\omega_0^2$.

For $E > 2\omega_0^2$ er trajektorierne åbne, svarende til at der ikke eksisterer periodiske bevægelser i dette tilfælde, se figur 2-12. Fysisk indebærer de viste trajektorier, hvor x vokser eller aftager ubegrænset, at pendulet drejer rundt i en fortsat bevægelse, enten mod uret (øvre halvdel) eller med uret (nedre halvdel). Maximal hastighed opnås for $x = 0, \pm 2\pi, \dots$, når massen er i nedre position, og minimal hastighed for $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$, når den øvre ligevægtsstilling passerer.

Periodiske bevægelser omkring centrene i $y = 0 \wedge x = 0, \pm 2\pi, \dots$, er mulige for $0 < E < 2\omega_0^2$. $x = \theta$ varierer i dette tilfælde mellem værdierne $-\theta_{\max}$ og θ_{\max} , se figur 2-12. Fysisk svarer dette til, at pendulet svinger om den nedre ligevægtsposition, uden at dreje helt rundt.

Perioden T i den periodiske bevægelse bliver ved (2-78)

$$T = 4 \int_0^{\theta_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - \omega_0^2(1 - \cos x))}}, \quad 0 < E < 2\omega_0^2 \quad (2-80)$$

Det er her udnyttet, at trajektorierne i det betragtede tilfælde er symmetrisk om såvel x - som y -aksen. (2-80) er et elliptisk integral af 1. art.

2.4 Periodiske bevægelser. Infinitesimal stabilitet.

Periodiske bevægelser til (2-1) kan eksistere i såvel autonome som ikke-autonome systemer.

En nødvendig betingelse, for at systemet (1-2) af n -frihedsgrader besidder en periodisk bevægelse $\mathbf{x}^0(t)$, kan udledes ved at gange ligningerne med dx_i^0 efterfulgt af en summation af alle n bevægelsesligninger, hvorefter den resulterende skalære ligning integreres over en periode. Herved haves

$$\sum_{i=1}^n \oint m_i \ddot{x}_i^0 dx_i^0 + \sum_{i=1}^n \oint F_i dx_i^0 = \sum_{i=1}^n \oint p_i dx_i^0 \Rightarrow$$

$$\left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^0(t))^2 \right]_0^T + \sum_{i=1}^n \oint F_i dx_i^0 = \sum_{i=1}^n \oint p_i dx_i^0 \quad (2-81)$$

Hvis $\mathbf{x}^0(t)$ er periodisk med perioden T , er også $\dot{\mathbf{x}}^0(t)$ periodisk, jvf. (2-13). Herved forsvinder førsteleddet på venstresiden af (2-81). En nødvendig betingelse, for at $\mathbf{x}^0(t)$ er periodisk, er da, at følgende ligning er opfyldt

$$\sum_{i=1}^n \oint F_i dx_i^0 = \sum_{i=1}^n \oint p_i dx_i^0 \quad (2-82)$$

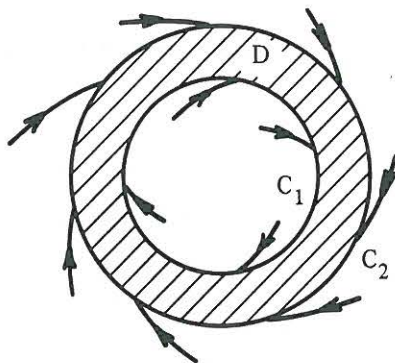
Den fysiske tolkning af (2-82) er, at arbejdet som de ydre belastninger udfører i løbet af en periode er lig det dissipative arbejde som tilbageføringskræfter udfører i samme periode, svarende til at der ingen nettotilførsel af energi finder sted.

Hvis tilbageføringskræfterne er konservative, jvf. (1-22), kan (2-82) reduceres yderligere

$$\sum_{i=1}^n \oint \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i^0 = \left[U(x_1^0(t), \dots, x_n^0(t)) \right]_0^T = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n \oint p_i dx_i^0 = 0 \quad (2-83)$$

(2-83) er identisk opfyldt ved egensvingninger af systemer med konservativ tilbageføringskræfter, hvor $p_i \equiv 0$. Heraf kan ikke sluttes, at egensvingninger i et konservativt system altid er periodisk. Eksempel 2-7 for $E > 2\omega_0^2$ illustrerer dette. Dette understreger, at (2-83) er en nødvendig betingelse, som en given bevægelse må opfylde for at være en periodisk bevægelse.



Figur 2-13: Illustration af Poincaré-Bendixon's sætning.

Tilstrækkelige betingelser for at et givet system besidder periodiske bevægelser er langt vanskeligere at angive, og noget simpelt anvendeligt kriterie eksisterer ikke. For et system af 1 frihedsgrad gælder følgende version af *Poincaré-Bendixon's sætning* [5]:

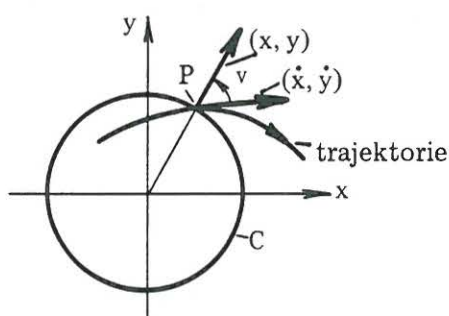
D er et ringformigt område begrænset af 2 koncentriske cirkler C_1 og C_2 . Det er da en tilstrækkelig betingelse for eksistensen af mindst en lukket trajektorie i D , at

1. Trajektorier overalt passerer ind i (ud af) D langs C_1 og overalt ind i (ud af) D langs C_2 .

2. Der forekommer ingen ligevægtspunkter i D eller på C_1 og C_2 .

Indholdet af sætningen er umiddelbart indlysende, hvis man benytter en hydrodynamisk analogi, hvori trajektorierne identificeres med strømninger, asymptotisk stabile og instabile ligevægtspunkter ved henholdsvis punktformige dræn og kilder, og orbitalt asymptotisk stabile og instabile lukkede trajektorier ved linieformige dræn og kilder. For at den første betingelse kan gælde, må der eksistere et dræn (kilde) enten i D eller på dette områdes begrænsninger. Den anden betingelse udelukker muligheden af punktformige dræn. Følgelig må der eksistere mindst et linieformigt dræn (kilde) i D .

Passerer trajektorierne kun ind eller ud af D langs en del af C_1 eller C_2 og har modsat retning på den øvrige del af disse cirkler, gælder Poincaré-Bendixon's sætning ikke. Vanskeligheden ved anvendelsen af sætningen er angivelsen af et område D , der opfylder sætningens præmisser.



Figur 2-14: Udkrydsning af trajektorie gennem cirkel C .

På figur 2-14 er vist en cirkel C med centrum i $(x, y) = (0, 0)$. Den udadgående normal til C i punkt (x, y) af periferien har koordinaterne (x, y) .

Tangenten til trajektorien gennem (x, y) har koordinaterne (\dot{x}, \dot{y}) .

Trajektorien foretager en udkrydsning fra det indre mod ydre af C , hvis vinklen v mellem normalen og tangenten er mindre end $\frac{\pi}{2}$, dvs.

$$\begin{aligned} \cos v > 0 &\Rightarrow \\ x\dot{x} + y\dot{y} > 0 \end{aligned} \quad (2-84)$$

For systemet (2-2) antager (2-84) formen

$$(x + f_2(x, y, t))y > 0 \quad (2-85)$$

Tilsvarende foretager trajektorien en indkrydsning fra det ydre mod det indre af C , hvis $\cos v < 0$, hvilket fører til betingelsen

$$(x + f_2(x, y, t))y < 0 \quad (2-86)$$

Hvis (2-85) er opfyldt til alle tider overalt på C_1 eller C_2 , eller (2-86) er opfyldt til alle tider overalt på C_1 eller C_2 , eksisterer der mindst 1 lukket trajektorie i D . Ulighederne i (2-85) og (2-86) kan erstattes af lighedstegn i et tælleligt antal punkter af C_1 eller C_2 , uden dette ændrer gyldigheden af sætningen.

Poincaré-Bendixsons sætning kan herved gives følgende formulering: Hvis

$$\forall t \geq 0 : (x + f_2(x, y, t))y \leq 0 \quad \text{overalt på } C_1 \text{ og } C_2 \quad (2-87)$$

eksisterer mindst 1 asymptotisk orbital trajektorie i D . Hvis

$$\forall t \geq 0 : (x + f_2(x, y, t))y \geq 0 \quad \text{overalt på } C_1 \text{ og } C_2 \quad (2-88)$$

eksisterer mindst 1 orbital instabil trajektorie i D .

Lighedstegnene i (2-87) og (2-88) må kun gælde i et tælleligt antal punkter.

Variationsligningerne for en periodisk løsning $\mathbf{x}^0(t)$ med perioden T bliver, jvf. (2-23)

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}(t)\mathbf{r}(t) \quad (2-89)$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t + T) \quad (2-89a)$$

Stabilitetsanalysen af (2-89) er væsentligt vanskeligere at gennemføre end den tilsvarende stabilitetsanalyse af ligevægtpunkter i autonome systeme. Grunden hertil er, at man i almindelighed ikke analytisk kan bestemme et system af basisløsninger til (2-89), dvs. m lineært uafhængige løsninger $\mathbf{r}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{r}^{(m)}(t)$ til (2-89). Det antages i det følgende, at en sådan basis er bestemt. Dette er altid numerisk muligt.

Floquet's sætning siger, at løsninger til (2-89) kan skrives

$$\mathbf{r}(t) = c_1 \text{Re}(e^{\lambda_1 t} \Phi^{(1)}(t)) + \dots + c_m \text{Re}(e^{\lambda_m t} \Phi^{(m)}(t)) \quad (2-90)$$

Koefficienterne c_1, \dots, c_m er reelle, mens $\Phi^{(1)}(t), \dots, \Phi^{(m)}(t)$ i almindelighed er komplekse periodiske vektorfunktioner med perioden T , dvs.

$$\Phi^{(i)}(t) = \Phi^{(i)}(t + T), \quad i = 1, \dots, m \quad (2-91)$$

De komplekse parametre $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ betegnes *karaktéristiske eksponenter*, og kan bestemmes entydigt ud fra den vilkårligt valgte basis $\mathbf{r}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{r}^{(m)}(t)$.

Inden beviset føres for Floquet's sætning, skal konsekvenserne af denne anføres. (2-90) er helt analog til løsningen (2-33) for et perturberet ligevægtpunkt. Forskellen er, at den konstante egenvektor $\Phi^{(i)}$ er erstattet af en periodisk, og dermed begrænset, vektorfunktion $\Phi^{(i)}(t)$. Det fremgår imidlertid, at stabiliteten af

løsningen i begge tilfælde bestemmes af faktoren $e^{\lambda_i t}$. Vi har hermed følgende betingelser for infinitesimal stabilitet af en periodisk bevægelse:

1. Den periodiske bevægelse er asymptotisk stabil, hvis det for alle karakteristiske eksponenter gælder, at disse har negativ realdel, dvs. hvis $\forall \lambda_i : \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$.
2. Den periodiske bevægelse er instabil, hvis blot en karakteristisk eksponent har positiv realdel, dvs. hvis $\exists \lambda_i : \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$.

Hvis en eller flere karakteristiske eksponenter opfylder betingelsen $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$, samtidig med de øvrige karakteristiske eksponenter har negativ realdel, kan stabiliteten ikke afgøres ved en infinitesimal analyse, men må baseres på den eksakte perturberede differentialligning (2-15).

Hvis variationsligningssystemet er asymptotisk stabilt eller instabilt, er også det eksakte perturberede differentialligningssystem asymptotisk stabilt eller instabilt. Systemet har i disse tilfælde signifikant opførsel, mens systemet siges at besidde kritisk opførsel, hvis en eller flere karakteristiske eksponenter for en given periodisk bevægelse opfylder betingelsen $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$, samtidig med de øvrige karakteristiske eksponenter har negativ realdel.

Herefter følger beviset for Floquet's sætning.

Lad $\mathbf{r}^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, m$ være m uafhængige løsninger til (2-89). Ved at erstatte t med $t + T$, og udnytte (2-89a), ses, at også $\mathbf{r}^{(i)}(t + T)$ er en løsning til (2-89). $\mathbf{r}^{(i)}(t + T)$ kan da entydigt skrives som en linearkombination af den vilkårligt valgte basis $\mathbf{r}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{r}^{(m)}(t)$:

$$\mathbf{r}^{(i)}(t + T) = b_{i1}\mathbf{r}^{(1)}(t) + \dots + b_{im}\mathbf{r}^{(m)}(t), \quad i = 1, \dots, m \quad (2-92)$$

Sættes eksempelvis $t = 0$ i (2-92), haves herved m lineære ligninger til bestemmelse af de ubekendte m udviklingskoefficienter (b_{i1}, \dots, b_{im}) . Dette gøres for $i = 1, \dots, m$.

Vi søger nu en kompleks løsning $\mathbf{s}(t)$ til (2-89) med egenskaben $\mathbf{s}(t + T) = \mu \mathbf{s}(t)$, hvor μ i almindelighed er kompleks. Såvel realdel som imaginærdel af $\mathbf{s}(t)$ er løsning til (2-89). Der gælder dermed udviklingen i den reelle basis $\mathbf{r}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{r}^{(m)}(t)$

$$\mathbf{s}(t) = a_1 \mathbf{r}^{(1)}(t) + \dots + a_m \mathbf{r}^{(m)}(t), \quad a_i \in C \quad (2-93)$$

(2-93) opskrives for tidspunktet $t + T$. Idet (2-92) benyttes, findes

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(t + T) &= \sum_{j=1}^m a_j \mathbf{r}^{(j)}(t + T) \\ &= \sum_{j=1}^m a_j \sum_{i=1}^m b_{ji} \mathbf{r}^{(i)}(t) \end{aligned} \quad (2-94)$$

Vi kræver derfor

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m a_j b_{ji} \mathbf{r}^{(i)}(t) = \mu \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{r}^{(i)}(t) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_j b_{ji} - \mu a_i \right) \mathbf{r}^{(i)}(t) = 0 \quad (2-95)$$

Da $\mathbf{r}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{r}^{(m)}(t)$ er lineært uafhængige løsninger, kan linearkombinationen (2-95) kun opfyldes, hvis samtlige koefficienter til $\mathbf{r}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{r}^{(m)}(t)$ er lig 0. Dette fører til betingelsesligningen

$$\sum_{j=1}^m b_{ji} a_j - \mu a_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} (b_{11} - \mu)a_1 + b_{21}a_2 + \dots + b_{m1}a_m &= 0 \\ b_{12}a_1 + (b_{22} - \mu)a_2 + \dots + b_{m2}a_m &= 0 \\ \vdots & \\ b_{1m}a_1 + b_{2m}a_2 + \dots + (b_{mm} - \mu)a_m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-96)$$

Ikke-trivielle løsninger $\mathbf{s}(t)$ med den søgte egenskab eksisterer, hvis der eksisterer ikke-trivielle løsninger (a_1, \dots, a_m) til det homogene ligningssystem (2-96). Den nødvendige betingelse for dette er, at determinanten til koefficientmatricen er lig 0, dvs.

$$\det \left(\begin{bmatrix} (b_{11} - \mu) & b_{21} & \dots & b_{m1} \\ b_{12} & (b_{22} - \mu) & \dots & b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1m} & b_{2m} & \dots & (b_{mm} - \mu) \end{bmatrix} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\mu^m + B_1 \mu^{m-1} + \dots + B_m = 0 \quad (2-97)$$

Da koefficienterne b_{ij} i (2-92) er reelle, er alle invarianten B_i i den karakteristiske ligning (2-97) reelle.

Rødderne μ_1, \dots, μ_m til (2-97) betegnes *karakteristiske multiplikatorer*. Disse antages forskellige. For hver af rødderne μ_i , $i = 1, \dots, m$, opnås herved en løsning $\mathbf{s}^{(i)}(t)$ til (2-89) med egenskaben $\mathbf{s}^{(i)}(t+T) = \mu_i \mathbf{s}^{(i)}(t)$. $\text{Re}(\mathbf{s}^{(1)}(t)), \dots, \text{Re}(\mathbf{s}^{(m)}(t))$ udgør herved en basis for løsningsmængden til (2-89).

En kompleks vektorfunktion $\Phi^{(i)}(t)$ defineres nu ved

$$\Phi^{(i)}(t) = \exp\left(-\frac{t}{T} \ln \mu_i\right) \mathbf{s}^{(i)}(t), \quad i = 1, \dots, m \quad (2-98)$$

hvor $\ln \mu_i$ betegner hovedværdien af logaritmen til μ_i . I (2-98) erstattes dernæst t med $t + T$, hvorved

$$\begin{aligned} \Phi^{(i)}(t + T) &= \exp\left(-\frac{t}{T} \ln \mu_i - \ln \mu_i\right) \mathbf{s}^{(i)}(t + T) \\ &= \exp\left(-\frac{t}{T} \ln \mu_i\right) \cdot \frac{1}{\mu_i} \cdot \mu_i \mathbf{s}^{(i)}(t) \\ &= \Phi^{(i)}(t) \end{aligned} \quad (2-99)$$

Følgelig er funktionen $\Phi^{(i)}(t)$ defineret ved (2-98) periodisk med perioden T . Heraf følger, at $\mathbf{s}^{(i)}(t)$ kan skrives

$$\mathbf{s}^{(i)}(t) = e^{\lambda_i t} \Phi^{(i)}(t) \quad (2-100)$$

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \ln \mu_i \quad (2-101)$$

Hvis derfor $\operatorname{Re}(\mathbf{s}^{(1)}(t)), \dots, \operatorname{Re}(\mathbf{s}^{(m)}(t))$ benyttes som basis, fremkommer løsningen (2-90) iht. (2-100). Dette slutter beviset for Floquet's sætning.

Skrives μ_i på formen $\mu_i = |\mu_i| \exp(i \arg(\mu_i))$, følger af (2-101), at $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \Leftrightarrow |\mu_i| < 1$. Stabilitetsanalysen kan derved afgøres direkte ud fra den numeriske værdi af de karakteristiske multiplikatorer, bestemt som rødder til den karakteristiske ligning (2-97). Den periodiske bevægelse er hermed asymptotisk stabil, hvis $\forall \mu_i : |\mu_i| < 1$ og instabil, hvis $\exists \mu_i : |\mu_i| > 1$.

Stabilitetsanalysen er hermed meget lig stabilitetsanalysen for ligevægtspunkter. Den ekstra vanskelighed ligger i bestemmelsen af en basis $\mathbf{r}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{r}^{(m)}(t)$, hvoraf koefficienterne b_{ij} , $i, j = 1, \dots, m$ kan afledes. Ved en numerisk analyse vil man vælge $\mathbf{r}^{(i)}(t)$ som løsningen til (2-89), der opfylder begyndelsesbetingelsen $\mathbf{r}_j^{(i)}(0) = \delta_{ij}$, dvs. den i . komponent til $\mathbf{r}^{(i)}(0)$ er lig 1, mens de øvrige komponenter er lig 0. I henhold til (2-92) bestemmes (b_{i1}, \dots, b_{im}) da direkte som løsningsvektoren til (2-89) til tiden $t = T$.

Eksempel 2-8: Infinitesimale ligninger ved harmonisk gensvar til Duffing's oscillator.

Der eksisterer en stationær periodisk bevægelse $x_0(t)$ til Duffing-oscillatoren (2-7). Funktionerne $k_0(t)$ og $c_0(t)$ i variationsligning (2-28) bliver iht. (2-26a) og (2-27a)

$$k_0(t) = \omega_0^2(1 + 3\mu x_0^2(t)) \quad (2-102)$$

$$c_0(t) = 0 \quad (2-103)$$

I det lineære tilfælde for $\mu = 0$ er den stationære løsning til (2-7) givet ved

$$x_0(t) = A \cos \omega t, \quad A = \frac{P_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (2-104)$$

For $\mu \neq 0$ er den stationære løsning periodisk med perioden $\frac{2\pi}{\omega}$, men i almindelighed ikke harmonisk varierende. For numerisk små værdier af μ må responset dog være domineret af Fourierkomponenten med grundfrekvensen ω . Vi antager derfor, at (2-104) også gælder i dette tilfælde, idet amplituden A dog nu tillige afhænger af μ . Berettigelsen af denne antagelse vurderes i afsnit 3.

Ved indsættelse af (2-102), (2-103), antager variationsligningen (2-28) formen

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 + \omega_0^2(1 + 3\mu A^2 \cos^2 \omega t)r_1 &= 0 \Rightarrow \\ \ddot{r}_1 + \omega_0^2\left(1 + \frac{3}{2}\mu A^2 + \frac{3}{2}\mu A^2 \cos 2\omega t\right)r_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2-105)$$

Der indføres følgende dimensionsløse parametre

$$\tau = \omega t \quad (2-106)$$

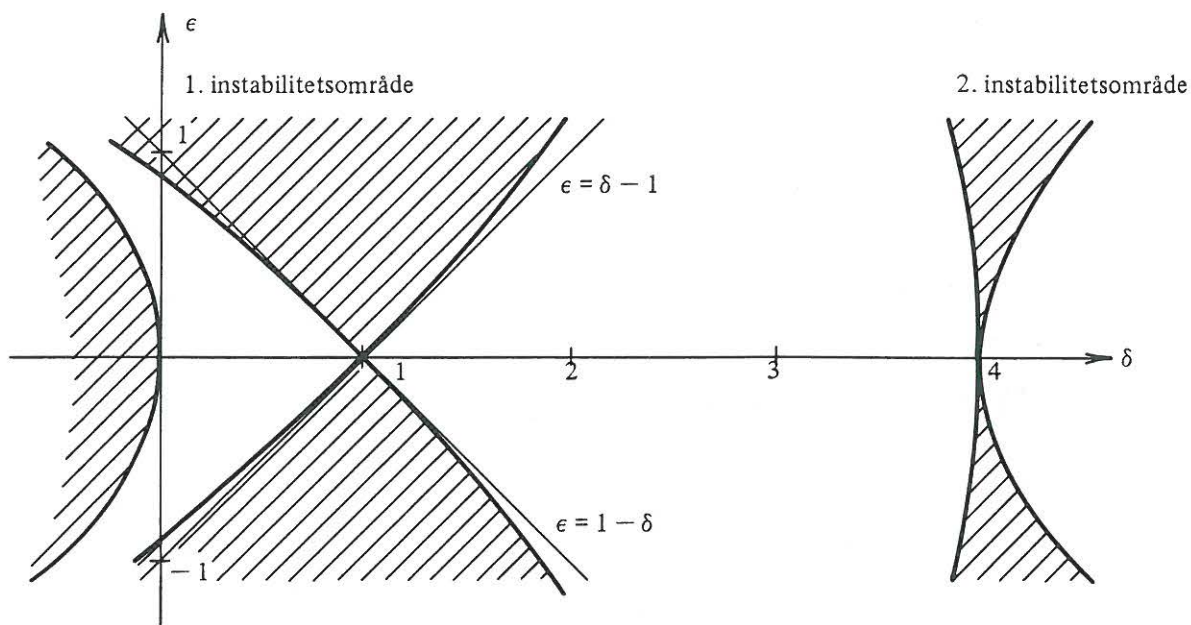
$$\delta = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3}{2}\mu A^2\right) \quad (2-107)$$

$$\epsilon = \frac{3}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \mu A^2 \quad (2-108)$$

hvorved (2-105) antager formen

$$\frac{d^2 r_1}{d\tau^2} + (\delta + 2\epsilon \cos 2\tau)r_1 = 0 \quad (2-109)$$

Stabilitetsanalysen af harmonisk gensvar af moderat ikke-lineære Duffingoscillatorer er hermed reduceret til stabilitetsanalysen af Mathieu's differentialligning (2-8).



Figur 2-15: Struttdiagram

Mathieu's differential ligning er instabil for visse kombinationer af ϵ og δ . Stabile og instabile områder i $(\delta - \epsilon)$ -planen er vist på figur 2-15, et såkaldt *Struttdiagram*. Det vises i afsnit 3.6, at det første instabilitetskområde for $\delta > 0$ begrænses tilnærmet af de rette linier $\epsilon = 1 - \delta$ og $\epsilon = \delta - 1$.

Med denne tilnærmelse er den harmoniske bevægelse (2-104) herved instabil svarende til det 1. instabilitetsområde, hvis

$$(\epsilon > 1 - \delta \wedge \epsilon > \delta - 1) \vee (\epsilon < \delta - 1 \wedge \epsilon < 1 - \delta) \quad (2 - 110)$$

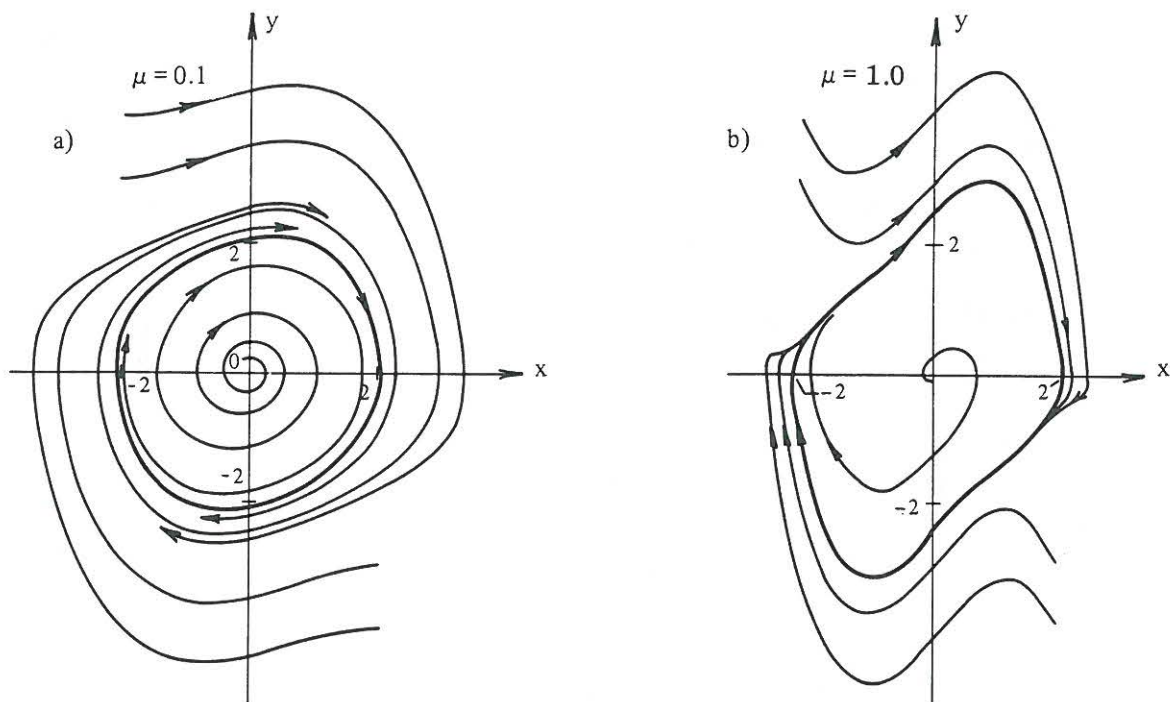
Ud fra Struttdiagrammet kan man nu ved (2-107) og (2-108) konstruere et diagram i (A, ω) -planen, der viser sammenhængen mellem stabile og instabile periodiske bevægelser som funktion af A og den cykliske frekvens ω .

For de tilnærmede stabilitetsgrænser (2-110) findes følgende betingelser for instabilitet

$$\left(\frac{3}{4} \mu A^2 < \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 < \frac{9}{4} \mu A^2 \right) \vee \left(\frac{9}{4} \mu A^2 < \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 < \frac{3}{4} \mu A^2 \right) \quad (2 - 111)$$

Venstre side af disjunktionen i (2-111) er restriktiv ved hårde fjedre ($\mu > 0$), mens højre halvdel er restriktiv ved bløde fjedre ($\mu < 0$).

Eksempel 2-9: Periodisk bevægelse til van der Pol's differentialligning.



Figur 2-16: Faseportræt for van der Pol's oscillator.

Van der Pol's oscillator (2-4) vides at besidde en periodisk bevægelse for $\mu > 0$. Heuristisk kan dette ses på følgende måde.

Oscillatoren har som eneste ligevægtspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$, der let vises at svare til et instabilt focus for $0 < \mu < 2$, en instabil ægte knude for $\mu = 2$ og en instabil uægte knude for $2 < \mu < \infty$.

Når svingningsniveauet er lavt ($x^2 + y^2 \ll 1$) er $-\mu(1 - x^2) < 0$. Herved gælder for alle cirkulationer i en omegn af ligevægtspunktet, sammenlign (1-28)

$$\oint \mu(1 - x^2) \dot{x} dx = - \oint \mu(1 - x^2) \dot{x}^2 dt < 0 \quad (2-112)$$

(2-112) indebærer, at oscillatoren tilføres en nettoenergi ved enhver cirkulation. Vi kan alene af dette slutte, at ligevægtspunktet er instabilt, og trajektorierne vil bevæge sig bort fra ligevægtspunktet.

Når svingningsniveauet er højt ($x^2 + y^2 \gg 1$), gælder $\mu(1 - x^2) > 0$ langs størstedelen af cirkulationen. I dette tilfælde forekommer der derfor en nettodissipation af energi under cirkulationen. Oscillatoren vil herved søge mod lavere svingningsniveauer.

Ved moderate svingningsniveauer ($x^2 + y^2 \simeq 1$) afbalancerer de to tendenser hverandre, hvilket netop er betingelsen for en periodisk bevægelse, jvf. (2-82).

Trajektorierne er optegnet på figur 2-16 for $\mu = 0.1$ og $\mu = 1.0$.

Når $|\mu| \ll 1$ bliver løsningen til (2-4) tilnærmet harmonisk. På nær en arbitrær faseforskydning er den periodiske bevægelse da tilnærmet givet ved

$$\left. \begin{aligned} x(t) &\simeq A \cos t \\ y(t) &\simeq -A \sin t \end{aligned} \right\} \quad (2-113)$$

For at (2-113) er en mulig periodisk bevægelse, skal (2-82) være opfyldt. Heraf følger

$$\begin{aligned} &\oint (-\mu(1-x^2)\dot{x} + x)dx \\ &= \oint -\mu(1-x^2)\dot{x}^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\mu(1-A^2 \cos^2 t) A^2 \sin^2 t dt \\ &= -\mu(\pi A^2 - \frac{1}{4}\pi A^4) = 0 \Rightarrow A = 2 \end{aligned} \quad (2-114)$$

For $|\mu| \ll 1$ er trajektorien for den periodiske bevægelse således en cirkel med radius $A \simeq 2$. Dette forhold fremgår klart af figur 2-16a.

Trajektorien for den periodiske bevægelse er asymptotisk orbital stabil for $\mu > 0$.

For $\mu < 0$ er trajektorien orbitalt instabil, mens ligevægtstilstanden er stabil. Trajektorier for bevægelser, der starter indenfor trajektorien for den periodiske bevægelse bevæger sig mod ligevægtspunktet, mens trajektorier, der starter udenfor denne, bevæger sig mod uendeligt.

Man bemærker, at en asymptotisk orbital stabil trajektorie omslutter et instabilt ligevægtspunkt, og en orbital instabil trajektorie omslutter et asymptotisk stabilt ligevægtspunkt.

2.5 Liapunov's direkte metode.

Liapunov's direkte metode [1], også betegnet *Liapunov's 2. metode*, giver en mulighed for at bestemme stabilitetsegenskaberne af en given uperturberet bevægelse, uden at man behøver at løse det perturberede differentiaalligningssystem (2-15). I det følgende indskrænkes betragtningerne til autonome systemer, hvorved (2-15) reduceres til

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 \quad (2-115)$$

Til systemet (2-115) skal nu tilknyttes en skalarfunktion $E: R^m \rightarrow R$ af tilstandsvariablerne r_1, \dots, r_m med kontinuerte afledede af 1. orden mht. r_1, \dots, r_m . Vi vil benævne E en *Liapunovfunktion*, når bestemte ekstra egenskaber, der specificeres i det følgende, er opfyldt.

Den totale afledede af $E(r_1, \dots, r_m)$, dvs. ændringshastigheden af $E(r_1, \dots, r_m)$ udregnet langs trajektorien, er givet ved

$$\dot{E}(r_1, \dots, r_m) = \frac{d}{dt} E(r_1, \dots, r_m) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial E}{\partial r_i} \dot{r}_i \quad (2-116)$$

Som nævnt er $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ et ligevægtspunkt til (2-115). For den konstante bevægelse $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, er E derfor konstant til alle tidspunkter, hvorfor der må gælde $\dot{E}(0, \dots, 0) = 0$. Vi kan yderligere uden indskrænkning vælge E , så også denne funktion opfylder $E(0, \dots, 0) = 0$. For funktioner som E og \dot{E} indføres nu følgende definitioner:

1. $E(r_1, \dots, r_m)$ siges at være *positiv definit* i den kugleformige omegn $|\mathbf{r}| \leq \varepsilon$ af $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, hvis $E(r_1, \dots, r_m) > 0$ for alle \mathbf{r} i den kugleformige omegn, bortset fra begyndelsespunktet, hvor $E(0, \dots, 0) = 0$.
2. $E(r_1, \dots, r_m)$ siges at være *positiv semidefinit* i den kugleformige omegn $|\mathbf{r}| \leq \varepsilon$ af $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, hvis $E(r_1, \dots, r_m) \geq 0$ i omegnen. Dvs. der eksisterer punkter \mathbf{r} i omegnen af $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, for hvilke $E(r_1, \dots, r_m) = 0$.
3. $E(r_1, \dots, r_m)$ siges at være *indefinit*, hvis den kan antage såvel positive som negative værdier i den kugleformige omegn $|\mathbf{r}| \leq \varepsilon$, ligegyldigt hvor lille radius ε , der betragtes.

Begreberne *negativ definite* og *negativ semidefinite funktioner* defineres ved at vende ulighedstegnene i de 2 første ovenfor anførte definitioner.

Definitenesskaberne af $E(r_1, \dots, r_m)$ er afgørende ved Liapunov's metode, og det er derfor vigtigt, at man kan afgøre om en forelagt funktion $E(r_1, \dots, r_m)$ er positiv definit eller ej.

Hvis $E(r_1, \dots, r_m)$ er en homogen funktion af orden $p \in \mathbb{Z}_+$ i variableerne r_1, \dots, r_m , gælder pr. definition for en vilkårlig konstant $c \in \mathbb{R}$

$$E(cr_1, \dots, cr_m) = c^p E(r_1, \dots, r_m) \quad (2-117)$$

For p ulige, er $E(r_1, \dots, r_m)$ dermed indefinit. Specielt vil en lineær funktion $E(r_1, \dots, r_m) = a_1 r_1 + \dots + a_m r_m$ være indefinit. Er derimod p lige, kan ingen slutninger drages om definitenesskaberne.

For $p = 2$ haves en kvadratisk form. I dette tilfælde er E givet ved

$$E(r_1, \dots, r_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} r_i r_j \quad (2-118)$$

Matricen \mathbf{c} i (2-118) antages symmetrisk, hvorfor samtlige egenverdier er reelle. Ved hjælp af en lineær koordinattransformation kan en ny diagonaliseret kvadratisk form uden krydsprodukter opnås. Elementerne i hoveddiagonalen af denne kvadratiske form vil være egenverdierne til \mathbf{c} . En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at den kvadratiske form (2-118) er positiv definit (negativ definit) er da, at samtlige egenverdier er positive (negative). Er en eller flere af egenverdierne lig 0, mens de øvrige egenverdier er positive (negative) er den kvadratiske form positiv semidefinit (negativ semidefinit). Har egenverdierne forskelligt fortegn, er den kvadratiske form indefinit.

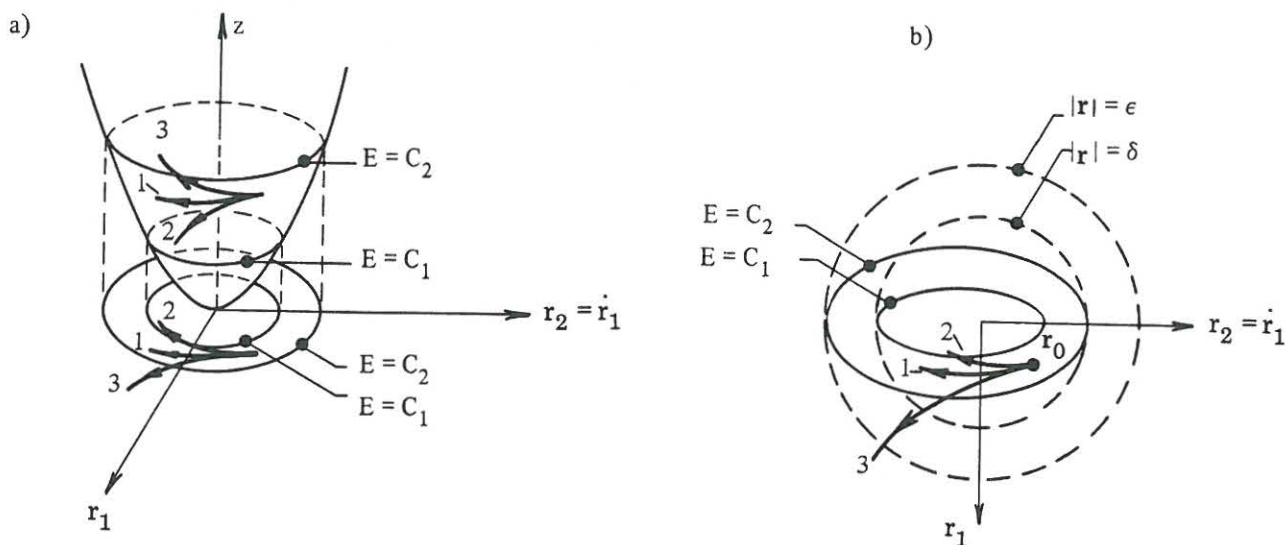
Med reference til Liapunov's stabilitetsdefinitioner (2-17), (2-18) gælder nu

Liapunov's 1. stabilitetssætning: Hvis der eksisterer en positiv definit funktion $E(r_1, \dots, r_m)$ til systemet (2-115), hvis totale afledede $\dot{E}(r_1, \dots, r_m)$ er negativ semidefinit langs enhver trajektorie til (2-115), er ligevægtspunktet $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ og dermed den uperturberede løsning stabil.

Liapunov's 2. stabilitetssætning: Hvis der eksisterer en positiv definit funktion $E(r_1, \dots, r_m)$ til systemet (2-115), hvis totale afledede $\dot{E}(r_1, \dots, r_m)$ er negativ definit langs enhver trajektorie til (2-115), er ligevægtspunktet $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ og dermed den uperturberede løsning asymptotisk stabil.

Liapunov har også angivet 2 instabilitetssætninger, hvoraf kun den første skal angives her.

Liapunov's 1. instabilitetssætning: Hvis der eksisterer en funktion $E(r_1, \dots, r_m)$ til systemet (2-115), hvis totale afledede $\dot{E}(r_1, \dots, r_m)$ er positiv definit langs enhver trajektorie, samtidig med at $E(r_1, \dots, r_m)$ kan antage positive værdier for vilkårligt numerisk små værdier af r_1, \dots, r_m , er ligevægtspunktet $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ og dermed den uperturberede løsning instabil.



Figur 2-17: Geometrisk fortolkning af Liapunov's stabilitetssætninger.

Vi skal her kun give et heuristisk bevis for sætningerne i tilfældet $m = 2$. Idet z -akse indføres som normal til faseplanen, repræsenterer $z = E(r_1, r_2)$ en flade i (r_1, r_2, z) -rummet. I tilfælde af en positiv definit funktion bliver fladen opad krum, og tangerer faseplanen i $(r_1, r_2) = (0, 0)$. Niveaukurverne på fladen, dvs. skæringskurven mellem fladen $z = E(r_1, r_2)$ og planerne $z = c = \text{konstant}$ er lukkede kurver; der ved projektion på faseplanen vil fremtræde som lukkede kurver

om origo, der ikke skærer hverandre. Dette er vist på figur 2-17a, hvor der tillige er indtegnet 3 trajektorier benævnt 1, 2, 3, der illustrerer indholdet af de 2 stabilitetssætninger og instabilitetssætningen. Trajektorierne er tillige projektoriet ind på fladen $z = E(r_1, r_2)$. Trajektorie 1 illustrerer tilfældet, hvor \dot{E} er positiv semidefinit. Trajektorie 1 vil have en tendens til at bevæge sig nedad på fladen $z = E(r_1, r_2)$, omend den dog også kan forblive på en niveaukurve i et tidsrum. Dette svarer til stabilitet. Trajektorie 2 illustrerer tilfældet, hvor \dot{E} er negativ definit. Da der bestandigt gælder $\dot{E} < 0$, kan trajektorie 2 ikke forblive på en niveaukurve, men må bestandigt bevæge sig nedad mod origo. Trajektorie 3 illustrerer endelig tilfældet, hvor \dot{E} er positiv definit, hvorfor trajektorien bestandigt må bevæge sig opad på fladen. Dette implikerer instabilitet.

Trajektorierne for de betragtede bevægelser har alle begyndelsesbetingelser $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ placeret indenfor det cirkulære område $|\mathbf{r}| < \delta$, men udenfor den lukkede kurve $E = C_1$, der der er indeskrevet i cirklen $|\mathbf{r}| = \delta$, se figur 2-17b. Niveaukurven $E = C_2 > C_1$ er indeskrevet i cirklen $|\mathbf{r}| = \varepsilon$. Det er klart, at trajektorie 2 vil krydse kurven $E = C_1$ udefra på vejen mod begyndelsespunktet. Ligeledes vil trajektorie 3 krydse $E = C_2$, og dernæst krydse ud gennem cirklen $|\mathbf{r}| = \varepsilon$. Trajektorie 1 kan øge sin afstand fra begyndelsespunktet til forskellige tidspunkter, men vil bestandigt forblive mellem kurverne $E = C_1$ og $E = C_2$. Trajektorien krydser følgelig aldrig cirklen $|\mathbf{r}| = \varepsilon$, og når heller aldrig begyndelsespunktet.

Vi betragter egensvingninger af systemet (1-2), dvs. $p_i(t) \equiv 0$. Tilbageføringskræfterne tænkes givet ved følgende udtryk, smlgn. (1-26)

$$F_i(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = g_i(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \frac{\partial}{\partial x_i} U(x_1, \dots, x_n),$$

$$i = 1, \dots, n \quad (2-119)$$

Herved antager (1-2) formen

$$m_i \ddot{x}_i + g_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \frac{\partial}{\partial x_i} U(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2-120)$$

Variationsligningen for perturbationen $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^0(t)$ opskrives nu. Idet den uperturberede bevægelse $\mathbf{x}^0(t)$ antages at være et ligevægtspunkt for det autonome system (2-119), hvorved $\dot{\mathbf{x}}^0 = \mathbf{0}$, findes

$$m_i \ddot{r}_i + g_i(\mathbf{r} + \mathbf{x}^0, \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{x}}^0) - g_i(\mathbf{x}^0, \dot{\mathbf{x}}^0) + \frac{\partial}{\partial x_i} (U(\mathbf{r} + \mathbf{x}^0) - U(\mathbf{x}^0))$$

$$= m_i \ddot{r}_i + g_i(\mathbf{r} + \mathbf{x}^0, \dot{\mathbf{r}}) - g_i(\mathbf{x}^0, \mathbf{0}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (U(\mathbf{r} + \mathbf{x}^0) - U(\mathbf{x}^0)) = 0,$$

$$i = 1, \dots, n \quad (2-121)$$

Analog med (1-27) kan antages $g_i(\mathbf{x}^0, \mathbf{0}) = 0$. (2-121) ganges dernæst med \dot{r}_i og alle n ligninger adderes.

Herved haves

$$\frac{d}{dt}E(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = - \sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{r} + \mathbf{x}^0, \dot{\mathbf{r}}) \dot{r}_i \quad (2-122)$$

$$E(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 + U(\mathbf{r} + \mathbf{x}^0) - U(\mathbf{x}^0) \quad (2-123)$$

$E(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ givet ved (2-122) kan identificeres som den mekaniske energi af perturbationen \mathbf{r} .

Hvis $U(\mathbf{x})$ har et lokalt minimum i \mathbf{x}^0 , følger at $E(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$, og $E(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) > 0$ for alle passende små perturbationer \mathbf{r} . Følgelig er $E(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ en positiv definit funktion i dette tilfælde. $E(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ er dermed en brugelig Liapunovfunktion, hvis totale afledede er givet ved (2-122).

Af Liapunov's 1. stabilitetssætning følger, at ligevægtspunktet $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x}^0, \mathbf{0})$ er stabilt, hvis

$$\forall (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \in R^n \times R^n : (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \Rightarrow \sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{r} + \mathbf{x}^0, \dot{\mathbf{r}}) \dot{r}_i \geq 0 \quad (2-124)$$

Af Liapunov's 2. stabilitetssætning følger, at ligevægtspunktet $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x}^0, \mathbf{0})$ er asymptotisk stabilt, hvis

$$\forall (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \in R^n \times R^n : (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \Rightarrow \sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{r} + \mathbf{x}^0, \dot{\mathbf{r}}) \dot{r}_i > 0 \quad (2-125)$$

Af Liapunov's 1. instabilitetssætning følger, at ligevægtspunktet $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x}^0, \mathbf{0})$ er instabilt, hvis

$$\forall (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \in R^n \times R^n : (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \Rightarrow \sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{r} + \mathbf{x}^0, \dot{\mathbf{r}}) \dot{r}_i < 0 \quad (2-126)$$

(2-125) og (2-126) indebærer fysisk, at de ikke-konservative tilbageføringskræfter bestandigt udfører henholdsvis et positivt og et negativt arbejde pr. tidsenhed. I det første tilfælde omdannes mekanisk energi bestandigt til varme, mens de ikke-konservative tilbageføringskræfter i det andet tilfælde bestandigt tilfører energi til systemet.

Tilfældet (2-124) er automatisk opfyldt ved egensvingninger af konservative autonome systemer, hvor $g_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \equiv 0$. Heraf følger, at et ligevægtspunkt $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x}^0, \mathbf{0})$ i et autonomt konservativt system er stabilt, hvis tøjningsenergifunktionen $U(\mathbf{x})$ har et lokalt minimum i $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$.

Idet det antages at g_i ikke afhænger af \mathbf{r} , bliver de infinitesimale variationsligninger svarende til (2-121)

$$m_i \ddot{r}_i + \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{r}_j + \sum_{j=1}^n k_{ij} r_j = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2-127)$$

$$c_{ij} = c_{ij}(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} g_i(\dot{\mathbf{r}}) \big|_{\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{0}} \quad (2-128)$$

$$k_{ij} = k_{ij}(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} U(\mathbf{r} + \mathbf{x}^0) \big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} \quad (2-129)$$

c_{ij} og k_{ij} er komponenter af henholdsvis dæmpningsmatricen \mathbf{c} og stivhedsmatricen \mathbf{k} . Idet \mathbf{x}^0 er et ligevægtspunkt, hvor $\frac{\partial}{\partial x_i} U(\mathbf{x}) \big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} = \frac{\partial}{\partial x_i} U(\mathbf{r} + \mathbf{x}^0) \big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} = 0$, findes ved Taylorudvikling af (2-123)

$$E(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} r_i r_j + o(|\mathbf{r}|^2) \quad (2-130)$$

Ifald den symmetriske matrix \mathbf{k} givet ved (2-129) er positiv definit i ligevægtspunktet $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x}^0, \mathbf{0})$, er $E(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ givet ved (2-130) en positiv definit Liapunovfunktion.

Da $g_i(\dot{\mathbf{r}}) = \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{r}_j$, følger af (2-124), (2-125), (2-126)

$(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x}^0, \mathbf{0})$ er infinitesimal stabil, hvis

$$\forall \dot{\mathbf{r}} \in R^n : \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{r}_i \dot{r}_j \geq 0 \quad (2-131)$$

$(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x}^0, \mathbf{0})$ er asymptotisk stabil, hvis

$$\forall \dot{\mathbf{r}} \in R^n : \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{r}_i \dot{r}_j > 0 \quad (2-132)$$

$(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x}^0, \mathbf{0})$ er instabil, hvis

$$\forall \dot{\mathbf{r}} \in R^n : \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{r}_i \dot{r}_j < 0 \quad (2-133)$$

Ved signifikant opførsel svarende til (2-132), (2-133) følger dermed, at hvis \mathbf{k} er positiv definit, er ligevægtspunktet asymptotisk stabilt, hvis \mathbf{c} er positiv definit, og instabilt, hvis \mathbf{c} er negativ definit.

Vanskeligheden ved Liapunov's direkte metode ligger i, at selvom en positiv definit Liapunovfunktion ikke kan defineres, kan ligevægtspunktet godt være stabilt alligevel.

2.6 Referencer.

- [1] A. M. Liapunov: *General Problems of Stability of Motion*. Charkov, 1892.
- [2] H. Poincaré: *Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste*. Gauthier-Villars, Paris, 1892.
- [3] N. G. Chetayev: *The Stability of Motion*. Pergamon Press, New York, 1961.
- [4] L. Cesari: *Asymptotic Behaviour and Stability Problems*. Springer Verlag, Berlin, 1959.
- [5] I. Bendixon. Acta Math., Vol. 24, 1901.

3. KVANTITATIVE METODER

I kapitel 2 studeredes stabilitetsegenskaberne ved ikke-lineære dynamiske systemer. De anførte udsagn om løsningerne var alle af kvalitativ natur i den forstand, at løsningernes eksplícitte afhængighed af tiden og begyndelsesbetingelserne som angivet ved (2.9) ikke bestemtes.

I dette afsnit søger vi at angive metoder, der muliggør en sådan eksplícit funktionssammenhæng. Da løsningen til ikke-lineære differentiaalligninger i regelen ikke kan bestemmes, må løsningerne, der opnås ved disse metoder, nødvendigvis være approksimative.

3.1 Grundlæggende perturbationsteknik.

Undertiden gælder, at ikke-lineariteterne i svingningsligningerne er små sammenlignet med de lineære led. Dette afsløres ved at indføre dimensionsløse tilstandsvariable af størrelsesorden 1. Herved optræder en dimensionsløs parameter foran de ikke-lineære led, der måler styrken af disse. Hvis den numeriske værdi af denne parameter er passende lille, vil ikke-lineariteterne ytre sig som perturbationer på det lineære system. Sådanne systemer vil vi betegne *svagt ikke-lineære*. Systemer beskrevet ved differentiaalligningerne (2.4), (2.5), (2.6) tilhører for numerisk små værdier af μ og α denne klasse af systemer.

Vi har set, at stabilitetsanalysen for periodiske bevægelser fører til løsningen af lineære differentiaalligninger med periodiske koefficienter, jvf. (2.82). Vanskeligheden er igen, at en generel løsningsteori for sådanne ligninger ikke er tilgængelig. Ofte kan ligningerne imidlertid adskilles i en del med konstante koefficienter, og en del med relativt små tidsvarierende koefficienter. Et sådant system vil vi betegne *svagt ikke-autonomt*. Mathieu's differentiaalligning (2.8) er svagt ikke-autonomt for $|\varepsilon| \ll |d|$.

Bevægelsesligningen for et svagt ikke-lineært eller svagt ikke-autonomt system af 1 frihedsgrad kan nu skrives

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x + \mu f(x, \dot{x}, t) &= 0 \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

Parameteren μ måler graden af ikke-linearitet eller ikke-autonomi. \ddot{x} , $2\zeta\omega_0\dot{x}$, ω_0^2x og $f(x, \dot{x}, t)$ antages alle af samme størrelsesorden, hvorfor der må gælde $|\mu| \ll 1$.

Løsningen til (3-1) vil afhænge af parameteren μ , foruden af tiden og begyndelsesbetingelserne, dvs.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mu), \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

For $\mu = 0$ reduceres løsningen (3-2) til løsningen til det lineære problem, der opnås ved at sætte $\mu = 0$ i (3-1). Det er da nærliggende at forsøge at udtrykke løsningen til (3-1) i en potensrække i μ , dvs.

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mu) = \mathbf{x}^{(0)}(t; \mathbf{x}_0^{(0)}) + \mu \mathbf{x}^{(1)}(t; \mathbf{x}_0^{(1)}) + \mu^2 \mathbf{x}^{(2)}(t; \mathbf{x}_0^{(2)}) + \dots \quad (3-3)$$

Højresiden af (3-3) kan opfattes som en Taylorudvikling af venstresiden ud fra $\mu = 0$. Rækken (3-3) er kun konvergent for $|\mu| < R$, hvor R er rækkens konvergensradius. Denne er i almindelighed ukendt.

Funktionerne $\mathbf{x}^{(i)}(t; \mathbf{x}_0^{(i)})$, $i = 0, 1, \dots$ betegnes *i. ordensløsningen*. Som vist i det følgende bestemmes disse funktioner trinvist som løsning til samme lineære differentialligning med forskellig inhomogenitet og begyndelsesbetingelsesbetingelser $\mathbf{x}^{(i)}(0) = \mathbf{x}_0^{(i)}$. Funktionerne $\mathbf{x}^{(i)}(t)$ er alle uafhængige af μ . $\mathbf{x}^{(0)}(t)$, $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, \dots er alle af samme størrelsesorden og af størrelsesorden som løsningen $\mathbf{x}(t)$.

Sættes $t = 0$ i (3-3) findes

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^{(0)} + \mu \mathbf{x}_0^{(1)} + \mu^2 \mathbf{x}_0^{(2)} + \dots \quad (3-4)$$

(3-4) må være opfyldt for en vilkårlig værdi af μ . Heraf følger

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_0^{(0)} &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_0^{(i)} &= \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3-5)$$

Indsættes løsningsantagelsen (3-3) i (3-1) findes

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}^{(0)} + 2\zeta\omega_0\dot{\mathbf{x}}^{(0)} + \omega_0^2\mathbf{x}^{(0)} + \mu(\ddot{\mathbf{x}}^{(1)} + 2\zeta\omega_0\dot{\mathbf{x}}^{(1)} + \omega_0^2\mathbf{x}^{(1)}) \\ + \mu^2(\ddot{\mathbf{x}}^{(2)} + 2\zeta\omega_0\dot{\mathbf{x}}^{(2)} + \omega_0^2\mathbf{x}^{(2)}) + \dots + \mu f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = 0 \end{aligned} \quad (3-6)$$

Det antages, at $f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ besidder partielle afledede mht. \mathbf{x} og $\dot{\mathbf{x}}$ af tilstrækkelig høj orden. Herved kan $f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ udvikles i en Taylorrække ud fra 0. ordensløsningen $(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)})$, dvs.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) &= f(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}, t) + f_{,x}(\mathbf{x}^{(0)}, t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) + f_{,\dot{x}}(\mathbf{x}^{(0)}, t)(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}^{(0)}) \\ &+ \frac{1}{2}f_{,xx}(\mathbf{x}^{(0)}, t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)})^2 + f_{,x\dot{x}}(\mathbf{x}^{(0)}, t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)})(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}^{(0)}) \\ &+ \frac{1}{2}f_{,\dot{x}\dot{x}}(\mathbf{x}^{(0)}, t)(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}^{(0)})^2 + \dots \end{aligned} \quad (3-7)$$

hvor $f_{,x}(\mathbf{x}^{(0)}, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}^{(0)}, \dot{\mathbf{x}}^{(0)}, t)$ etc.

$(x - x^{(0)}) = \mu x^{(1)} + \mu^2 x^{(2)} + \dots$ og $(\dot{x} - \dot{x}^{(0)}) = \mu \dot{x}^{(1)} + \mu^2 \dot{x}^{(2)} + \dots$ indsættes på højresiden af (3-7), og led med fælles faktor μ^n samles. Herved haves

$$\begin{aligned} f(x, \dot{x}, t) &= f(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}, t) + \mu \left(f_{,x}(\mathbf{x}^{(0)}, t) x^{(1)} + f_{,\dot{x}}(\mathbf{x}^{(0)}, t) \dot{x}^{(1)} \right) \\ &+ \mu^2 \left(f_{,x}(\mathbf{x}^{(0)}, t) x^{(2)} + f_{,\dot{x}}(\mathbf{x}^{(0)}, t) \dot{x}^{(2)} \right) \\ &+ \frac{1}{2} f_{,xx}(\mathbf{x}^{(0)}, t) (x^{(1)})^2 + f_{,x\dot{x}}(\mathbf{x}^{(0)}, t) x^{(1)} \dot{x}^{(1)} + \frac{1}{2} f_{,\dot{x}\dot{x}}(\mathbf{x}^{(0)}, t) (\dot{x}^{(1)})^2 + \dots \end{aligned} \quad (3-8)$$

(3-8) indsættes i (3-6). Igen samles led med fælles faktor μ^n . Herved haves

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(0)} + 2\zeta\omega_0\dot{x}^{(0)} + \omega_0^2 x^{(0)} + \mu \left(\ddot{x}^{(1)} + 2\zeta\omega_0\dot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} + f(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}, t) \right) \\ + \mu^2 \left(\ddot{x}^{(2)} + 2\zeta\omega_0\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + f_{,x}(\mathbf{x}^{(0)}, t) x^{(1)} + f_{,\dot{x}}(\mathbf{x}^{(0)}, t) \dot{x}^{(1)} \right) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (3-9)$$

$x^{(0)}(t; \mathbf{x}_0)$ og $x^{(i)}(t; 0)$ er uafhængig af μ . Skal (3-9) derfor gælde for vilkårligt μ , må leddene i parenteserne være lig 0. I forbindelse med (3-5) opnås herved følgende differentiaalligningssystem til bestemmelse af $x^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(0)} + 2\zeta\omega_0\dot{x}^{(0)} + \omega_0^2 x^{(0)} &= 0, \quad x^{(0)}(0) = x_0, \quad \dot{x}^{(0)} = \dot{x}_0 \\ \ddot{x}^{(1)} + 2\zeta\omega_0\dot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} &= -f(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}, t), \quad x^{(1)}(0) = \dot{x}^{(1)}(0) = 0 \\ \ddot{x}^{(2)} + 2\zeta\omega_0\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} &= -f_{,x}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}, t) x^{(1)} - f_{,\dot{x}}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}, t) \dot{x}^{(1)}, \\ x^{(2)}(0) &= \dot{x}^{(2)}(0) = 0 \\ \vdots & \end{aligned} \quad (3-10)$$

Man starter med at løse 0. ordensligningen. Højresiden af 1. ordensligningen er herved en kendt eksplisit funktion af tiden. $x^{(1)}(t)$ kan herved bestemmes ved Duhamel's integral. Med $x^{(0)}(t)$ og $x^{(1)}(t)$ kendt er højresiden af 2. ordensligningen en kendt funktion, hvorved $x^{(2)}(t)$ kan bestemmes. Generelt vil på højresiden af n . ordensligningen kun indgå allerede bestemte funktioner, svarende til, at processen kan fortsættes ubegrænset.

Den beskrevne fremgangsmåde betegnes en *perturbationsmetode*. Der er 2 principielle problemer i fremgangsmåden. For det første er konvergens af rækken (3-3) mod den korrekte løsning ikke garanteret for nogen værdi af $\mu \neq 0$. For det andet involverer højresiderne af (3-10) beregningen af stadig højere ordens afledede og stadig flere led, når korrektionsled af stadig højere orden ønskes bestemt. Disse

bliver derfor stadig vanskeligere at bestemme. Rækken må i konsekvens heraf i praksis afrundes efter et begrænset antal led.

3.2 Sekulære led. Lindstedt's metode.

I dette afsnit betragtes egensvingninger af et svagt ikke-lineært autonomt system beskrevet ved differentialligningen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu f(x, \dot{x}) &= 0 \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-11)$$

Et sådant system vil vi betegne *kvasi-harmonisk*. Betegnelsen refererer til at løsningen til (3-11) er harmonisk for $\mu = 0$. Løsningen til det ikke-lineære system vil i dette tilfælde være en perturbation af den harmoniske løsning. Systemerne beskrevet ved (2-4), (2-5), (2-6) tilhører klassen af kvasi-harmoniske systemer, hvis disse systemer samtidigt er svagt ikke-lineære.

Duffingoscillatoren (2-6) har periodiske løsninger i omegnen af et center. Van der Poloscillatoren (2-4) vides at besidde en periodisk bevægelse, hvis trajektorie for $\mu > 0$ er asymptotisk orbital stabil. Søger man nu at bestemme disse periodiske bevægelser ved metoden i afsnit 3.1, vil man finde, at i. ordensløsningerne $x^i(t)$, $i = 1, 2, \dots$ alle er ikke-periodiske funktioner af tiden, og ovenikøbet vokser ubegrænset for $t \rightarrow \infty$. Enhver endelig afrunding af rækken (3-3) kan dermed hverken være periodisk eller begrænset for $t \rightarrow \infty$. Alligevel kan (3-3) udmærket konvergere mod en periodisk funktion, når antallet af led vokser ud over alle grænser. Vi vil illustrere dette forhold med 2 eksempler i det følgende.

Betragt først egensvingninger af Duffingoscillatoren (2-6), der antages kvasi-harmonisk

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu \omega_0^2 x^3 &= 0 \\ x(0) = 0, \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-12)$$

I dette tilfælde er $f(x, \dot{x}, t) = \omega_0^2 x^3$. Herved antager (3-10) formen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(0)} + \omega_0^2 x^{(0)} &= 0 \\ x^{(0)}(0) = A, \dot{x}^{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-13a)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} &= -\omega_0^2 (x^{(0)})^3 \\ x^{(1)}(0) = \dot{x}^{(1)}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-13b)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} &= -3\omega_0^2 (x^{(0)})^2 x^{(1)} \\ x^{(2)}(0) &= \dot{x}^{(2)}(0) = 0 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (3-13c)$$

0. ordensligningen (3-13a) har løsningen

$$x^{(0)}(t) = A \cos \omega_0 t \quad (3-14)$$

1. ordensligningen (3-13b) bliver da

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} &= -\omega_0^2 A^3 \cos^3 \omega_0 t = -\frac{3}{4}\omega_0^2 A^3 \cos \omega_0 t - \frac{1}{4}\omega_0^2 A^3 \cos 3\omega_0 t \\ x^{(1)}(0) &= \dot{x}^{(1)}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-15)$$

Ved indsætning ses (3-15) at have løsningen

$$x^{(1)}(t) = -\frac{3}{8}\omega_0 t A^3 \sin \omega_0 t + \frac{1}{32}A^3 (\cos 3\omega_0 t - \cos \omega_0 t) \quad (3-16)$$

Det 1. led på højre side af (3-16) er ikke-periodisk, og vokser ubegrænset for $t \rightarrow \infty$. Dette led skyldes resonanspåvirkning fra det 1. led på højresiden af (3-15), der betegnes et *sekulært led*. Fortsættes bestemmelsen af $x^{(2)}, x^{(3)}, \dots$, vil man iagttage lignende sekulære led på højresiden af de tilhørende differentiaalligninger. Disse funktioner bliver ligeledes ikke-periodiske og vokser ubegrænset for $t \rightarrow \infty$.

Dernæst betragtes egensvingninger af et lineært viskøst dæmpet kvasiharmonisk system

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2\mu\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \\ x(0) &= A, \quad \dot{x}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-17)$$

Løsningen til (3-17) er givet ved

$$x(t; A, \mu) = A e^{-\mu\omega_0 t} \cos(\sqrt{1 - \mu^2\omega_0 t}) \quad (3-18)$$

(3-18) kan Taylorudvikles ud fra $\mu = 0$. Herved haves

$$\begin{aligned} x(t; A, \mu) &= A \left(1 - \mu\omega_0 t + \frac{1}{2}\mu^2\omega_0^2 t^2 - \dots \right) (\cos \omega_0 t + \mu^2 \frac{1}{2}\omega_0 t \sin \omega_0 t + \dots) \\ &= A \cos \omega_0 t + \mu (-A\omega_0 t \cos \omega_0 t) + \mu^2 \left(\frac{1}{2}\omega_0 t A \sin \omega_0 t + \frac{1}{2}\omega_0^2 t^2 A \cos \omega_0 t \right) + \dots \end{aligned} \quad (3-19)$$

Man overbeviser sig let om, at fremgangsmåden i afsnit 3.1 giver løsninger for $x^{(i)}(t)$, $i = 1, 2, \dots$, der er lig leddene i parenteserne i (3-19). Hver af disse vokser ubegrænset for $t \rightarrow \infty$. Alligevel vil (3-19) iht. udledelsen konvergere mod den begrænsede løsning (3-18).

Af eksemplerne fremgår, at den formelle fremgangsmåde i afsnit 3.1 må modificeres ved kvasiharmoniske systemer pga. de sekulære led. En sådan modifikation af metoden blev angivet af Lindstedt [1].

Egensvingningstiden $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ af det til (3-11) svarende lineære system afhænger ikke af amplituden A i bevægelsen. I modsætning hertil vil egensvingningstiden af konservative ikke-lineære systemer afhænge af svingningsniveauet, jvf. (2-76). Dette må betyde, at T og dermed den cykliske egenfrekvens $\omega = \frac{2\pi}{T}$ afhænger af perturbationsparameteren, i.e. $\omega = \omega(\mu)$. For $\mu = 0$ må vi have $\omega = \omega_0$.

Princippet i Lindstedt's metode er nu at frembringe en perturbationsrække som (3-3), men hvor løsningerne af vilkårlig høj orden er periodiske funktioner med perioden $\frac{2\pi}{\omega}$, og hvor der tages hensyn til, at egensvingningstiden $T = \frac{2\pi}{\omega}$ påvirkes af ikke-lineariteterne. Løsningen til (3-12) søges derfor på formen

$$x(t; x_0, \dot{x}_0, \mu) = x^{(0)}(t; x_0, \dot{x}_0) + \mu x^{(1)}(t; 0, 0) + \mu^2 x^{(2)}(t; 0, 0) + \dots \quad (3-20)$$

$$\omega^2(\mu) = \omega_0^2 + \mu \alpha_1 + \mu^2 \alpha_2 + \dots \quad (3-21)$$

hvor

$$x^{(i)}(t) = x^{(i)}\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right), \quad i = 0, 1, \dots \quad (3-22)$$

De ukendte parametre $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ bestemmes trinvist ved betingelsen, at $x^{(i)}(t)$ er periodisk.

(3-20) og (3-21) indsættes i (3-11). Herved haves, idet Taylorudviklingen (3-7) indsættes for $f(x, \dot{x})$:

$$\begin{aligned} & \ddot{x}^{(0)} + \mu \ddot{x}^{(1)} + \mu^2 \ddot{x}^{(2)} + \dots \\ & + (\omega^2 - \mu \alpha_1 - \mu^2 \alpha_2 - \dots)(x^{(0)} + \mu x^{(1)} + \mu^2 x^{(2)} + \dots) \\ & + \mu \left(f(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}) + \mu (f_{,x}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})x^{(1)} + f_{,\dot{x}}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})\dot{x}^{(1)}) + \dots \right) = 0 \Rightarrow \\ & \ddot{x}^{(0)} + \omega^2 x^{(0)} + \mu (\ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} + f(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}) - \alpha_1 x^{(0)}) \\ & + \mu^2 (\ddot{x}^{(2)} + \omega^2 x^{(2)} + f_{,x}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})x^{(1)} + f_{,\dot{x}}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})\dot{x}^{(1)} \\ & - \alpha_1 x^{(1)} - \alpha_2 x^{(0)}) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (3-23)$$

Heraf udledes differentialligningssystemet

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(0)} + \omega^2 x^{(0)} &= 0 \\ x^{(0)}(0) = x_0, \dot{x}^{(0)}(0) &= \dot{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-24a)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} &= -f(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}) + \alpha_1 x^{(0)} \\ x^{(1)}(0) = \dot{x}^{(1)}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-24b)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(2)} + \omega^2 x^{(2)} &= -f_{,x}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})x^{(1)} - f_{,\dot{x}}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})\dot{x}^{(1)} + \alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(0)} \\ x^{(2)}(0) = \dot{x}^{(2)}(0) &= 0 \\ \vdots \end{aligned} \right\} \quad (3-24c)$$

(3-24) er identisk med (3-10) bortset fra leddene på højresiderne med de ubekendte faktorer $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. Disse bestemmes ud fra betingelsen, at i. ordensløsningen bliver periodisk med perioden $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Dette indebærer, at der ikke må eksistere sekulære led på højresiden af i. ordens differentialligningen i (3-24).

$x^{(0)}$ bliver ifølge (3-24a) harmonisk og dermed periodisk med perioden $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Højresiden af (3-24b), dvs. funktionen

$$g(t) = -f(x^{(0)}(t), \dot{x}^{(0)}(t)) + \alpha_1 x^{(0)}(t) \quad (3-25)$$

bliver herved en periodisk funktion med perioden T . Følgelig kan $g(t)$ udvikles i en Fourierrække, dvs.

$$g(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t \quad (3-26)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cos n\omega t dt, \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin n\omega t dt \quad (3-27)$$

De sekulære led udgøres åbenbart af Fourierkomponenterne $A_1 \cos \omega t$ og $B_1 \sin \omega t$, der vil resonanspåvirke systemet, og derved frembringe ikke-periodiske løsninger, der vokser ubegrænset. Betingelsen for periodiske løsninger er dermed, at $A_1 = B_1 = 0$. Af (3-25) og (3-27) følger heraf, at α_1 skal opfylde betingelsesligningerne

$$\int_0^T f(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}) \cos \omega t dt = \alpha_1 \int_0^T x^{(0)}(t) \cos \omega t dt \quad (3-28a)$$

$$\int_0^T f(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}) \sin \omega t dt = \alpha_1 \int_0^T x^{(0)}(t) \sin \omega t dt \quad (3-28b)$$

(3-28a) og (3-28b) er 2 betingelser til bestemmelse af samme parameter α_1 . Metoden bryder derfor ned, hvis ikke der eksisterer en værdi α_1 , der samtidigt tilfredsstiller både (3-28a) og (3-28b). Dette stiller nogle betingelser til funktionen $f(x, \dot{x})$ og 0. ordensløsningen $x^{(0)}$, som vi dog ikke skal angive.

Herefter kan $x^{(1)}(t)$ entydigt bestemmes som en periodisk funktion af den resulterende ligning (3-24b).

α_1 og $x^{(1)}(t)$ indsættes dernæst på højresiden af (3-24c). Højresiden bliver herved en periodisk funktion af tiden. Ved igen at kræve, at de sekulære skal forsvinde, opnås følgende betingelser til bestemmelse af α_2 , analoge til (3-28a) og (3-28b)

$$\begin{aligned} & \int_0^T (f_{,x}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})x^{(1)} + f_{,\dot{x}}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})\dot{x}^{(1)} - \alpha_1 x^{(1)}) \cos \omega t dt \\ &= \alpha_2 \int_0^T x^{(0)}(t) \cos \omega t dt \end{aligned} \quad (3-29a)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T (f_{,x}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})x^{(1)} + f_{,\dot{x}}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})\dot{x}^{(1)} - \alpha_1 x^{(1)}) \sin \omega t dt \\ &= \alpha_2 \int_0^T x^{(0)}(t) \sin \omega t dt \end{aligned} \quad (3-29b)$$

(3-29) følger direkte af (3-28), fordi højresiden af (3-24c) svarer til højresiden af (3-24b), når $f(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})$ erstattes af $f_{,x}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})x^{(1)} + f_{,\dot{x}}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})\dot{x}^{(1)} - \alpha_1 x^{(1)}$.

Hvis (3-29a) og (3-29b) tilfredsstilles af samme værdi α_2 , kan en entydig periodisk løsning $x^{(2)}(t)$ herefter bestemmes af den resulterende ligning (3-24c). I modsat fald bryder proceduren ned, og kun approksimationer til og med 1. orden i μ i (3-20) og (3-21) kan bestemmes.

En trinvis bestemmelse af løsninger af stadig højere orden er herefter mulig, sålænge de to betingelsesligninger, analoge til (3-28) og (3-29), til bestemmelse af den ukendte parameter α_n på højresiden af n . ordensligningen samtidigt kan opfyldes.

Bryder proceduren ned før en given nøjagtighed er opnået, må den generelle, men mere besværlige Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky metode benyttes, se afsnit 3.3.

Eksempel 3.1: Egensvingninger af Duffing's differentialligning ved Lindstedt's metode.

Vi vil løse Duffingligningen (3-12) ved Lindstedt's metode. (3-24) antager herved formen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(0)} + \omega^2 x^{(0)} &= 0 \\ x^{(0)}(0) = A, \dot{x}^{(0)}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-30a)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} &= -\omega_0^2 (x^{(0)})^3 + \alpha_1 x^{(0)} \\ x^{(1)}(0) = \dot{x}^{(1)}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-30b)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(2)} + \omega^2 x^{(2)} &= -3\omega_0^2 (x^{(0)})^2 x^{(1)} + \alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(0)} \\ x^{(2)}(0) = \dot{x}^{(2)}(0) &= 0 \\ \vdots \end{aligned} \right\} \quad (3-30c)$$

0. ordensligningen (3-30a) har løsningen

$$x^{(0)}(t) = A \cos \omega t \quad (3-31)$$

1. ordensligningen (3-30b) bliver herved

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(1)}(t) + \omega^2 x^{(1)} &= -\omega_0^2 A^3 \cos^3 \omega t + \alpha_1 A \cos \omega t = \\ A(\alpha_1 - \frac{3}{4}\omega_0^2 A^2) \cos \omega t - \frac{1}{4}\omega_0^2 A^3 \cos 3\omega t \end{aligned} \quad (3-32)$$

Der er her benyttet, at $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$. Det 1. led på højresiden af (3-32) er sekulært. Heraf følger, at det sekulære led forsvinder, når

$$\alpha_1 = \frac{3}{4}\omega_0^2 A^2 \quad (3-33)$$

Dette resultat kunne også udledes af (3-28a) ved indsætning af $f(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}) = \omega_0^2 (x^{(0)})^3$ og $x^{(0)}(t)$ givet ved (3-31). (3-28b) er identisk opfyldt.

(3-30b) antager nu formen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} &= -\frac{1}{4}\omega_0^2 A^3 \cos 3\omega t \\ x^{(1)}(0) = \dot{x}^{(1)}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-34)$$

(3-34) ses at have løsningen

$$x^{(1)}(t) = \frac{1}{32} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} A^3 (\cos 3\omega t - \cos \omega t) \quad (3-35)$$

Ved (3-32), (3-33), (3-35) antager (3-30c) nu formen

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(2)} + \omega^2 x^{(2)} = & -\frac{3}{32} \frac{\omega_0^4}{\omega^2} A^5 \cos^2 \omega t (\cos 3\omega t - \cos \omega t) + \frac{3}{128} \frac{\omega_0^4}{\omega^2} A^5 (\cos 3\omega t - \cos \omega t) + \alpha_2 A \cos \omega t = \\ & A \left(\alpha_2 + \frac{3}{128} \frac{\omega_0^4}{\omega^2} A^4 \right) \cos \omega t - \frac{3}{128} \frac{\omega_0^4}{\omega^2} A^5 \cos 5\omega t \end{aligned} \quad (3-36)$$

Der er her benyttet, at $\cos^2 x (\cos 3x - \cos x) = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{1}{4} \cos 5x$. Det 1. led på højresiden af (3-36) er sekulært. Heraf følger, at det sekulære led forsvinder, når

$$\alpha_2 = -\frac{3}{128} \frac{\omega_0^4}{\omega^2} A^4 \quad (3-37)$$

(3-30c) antager herved formen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(2)} + \omega^2 x^{(2)} &= -\frac{3}{128} \frac{\omega_0^4}{\omega^2} A^5 \cos 5\omega t \\ x^{(2)}(0) &= \dot{x}^{(2)}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-38)$$

(3-38) har løsningen

$$x^{(2)}(t) = \frac{1}{1024} \frac{\omega_0^4}{\omega^4} A^5 (\cos 5\omega t - \cos \omega t) \quad (3-39)$$

Som ønsket er $x^{(0)}(t)$, $x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t)$ nu periodiske funktioner med perioden $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Perturbationsløsningen giver herved, idet led til og med 2. orden medtages

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos \omega t + \mu \frac{1}{32} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} A^3 (\cos 3\omega t - \cos \omega t) \\ &+ \mu^2 \frac{1}{1024} \frac{\omega_0^4}{\omega^4} A^5 (\cos 5\omega t - \cos \omega t) + o(\mu^2) \end{aligned} \quad (3-40)$$

Den cykliske egenfrekvens bliver ved (3-21), (3-33), (3-37)

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \mu \frac{3}{4} A^2 - \mu^2 \frac{3}{128} A^4 \right) + o(\mu^2) \quad (3-41)$$

I dette tilfælde kan Lindstedt's metode fortsættes til bestemmelsen af løsninger af vilkårlig høj orden.

Eksempel 3.2: Periodisk bevægelse af van der Pol's differentialligning ved Lindstedt's metode.

Van der Pol's differentialligning (2-4) antages kvasiharmonisk. Vi vil bestemme den periodiske løsning til ligningen som opfylder begyndelsesbetingelserne $(x_0, \dot{x}_0) = (A, 0)$ ved Lindstedt's metode.

I det foreliggende tilfælde er $\omega_0 = 1$ og $f(x, \dot{x}) = -(1 - x^2)\dot{x}$. (3-21) og (3-24) antager herved formen

$$\omega^2 = 1 + \mu\alpha_1 + \mu^2\alpha_2 + \dots \quad (3-42)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(0)} + \omega^2 x^{(0)} &= 0 \\ x^{(0)}(0) = A, \dot{x}^{(0)}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-43a)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} &= (1 - (x^{(0)})^2)\dot{x}^{(0)} + \alpha_1 x^{(0)} \\ x^{(1)}(0) = \dot{x}^{(1)}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-43b)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(2)} + \omega^2 x^{(2)} &= -2x^{(0)}\dot{x}^{(0)}x^{(1)} + (1 - (x^{(0)})^2)\dot{x}^{(1)} + \alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(0)} \\ x^{(2)}(0) = \dot{x}^{(2)}(0) &= 0 \\ \vdots \end{aligned} \right\} \quad (3-43c)$$

0. ordensligningen (3-43a) har løsningen

$$x^{(0)}(t) = A \cos \omega t \quad (3-44)$$

1. ordensligningen (3-43b) antager herved formen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} &= -A\omega(1 - A^2 \cos^2 \omega t) \sin \omega t + \alpha_1 A \cos \omega t = \\ &= -A\omega \left(1 - \frac{1}{4}A^2\right) \sin \omega t + \alpha_1 A \cos \omega t + \frac{1}{4}A^3\omega \sin 3\omega t \\ x^{(1)}(0) = \dot{x}^{(1)}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-45)$$

Der er her benyttet $\cos^2 x \sin x = \frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{4} \sin 3x$.

De sekulære led på højresiden af (3-45) forsvinder, hvis

$$A = 2 \quad (3-46)$$

$$\alpha_1 = 0 \quad (3-47)$$

Ved indsætning af (3-46) og (3-47) i (3-45) findes herved løsningen

$$x^{(1)}(t) = \frac{1}{32} \frac{A^3}{\omega} (3 \sin \omega t - \sin 3\omega t) = \frac{1}{4\omega} (3 \sin \omega t - \sin 3\omega t) \quad (3-48)$$

Ved (3-44), (3-46), (3-47), (3-48) antager (3-43c) formen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(2)} + \omega^2 x^{(2)} &= 2 \cos \omega t \sin \omega t (3 \sin \omega t - \sin 3\omega t) \\ &+ \frac{3}{4} (1 - 4 \cos^2 \omega t) (\cos \omega t - \cos 3\omega t) + \alpha_2 2 \cos \omega t = \\ &(\frac{1}{4} + 2\alpha_2) \cos \omega t - \frac{3}{2} \cos 3\omega t + \frac{5}{4} \cos 5\omega t \\ x^{(2)}(0) &= \dot{x}^{(2)}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-49)$$

Der er her benyttet $2 \cos x \sin x (3 \sin x - \sin 3x) = \cos x - \frac{3}{2} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos 5x$ og $(1 - 4 \cos^2 x) \cdot (\cos x - \cos 3x) = -\cos x + \cos 5x$. Det sekulære led på højresiden af (3-49) forsvinder, hvis

$$\alpha_2 = -\frac{1}{8} \quad (3-50)$$

(3-49) har herved løsningen

$$x^{(2)}(t) = \frac{3}{16\omega^2} (\cos 3\omega t - \cos \omega t) - \frac{5}{96\omega^2} (\cos 5\omega t - \cos \omega t) \quad (3-51)$$

Perturbationsløsningen (3-20), (3-42) giver herved, idet led til og med 2. orden medtages

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(2 - \frac{13\mu^2}{96\omega^2}\right) \cos \omega t + \frac{3\mu}{4\omega} \sin \omega t + \frac{3\mu^2}{16\omega^2} \cos 3\omega t \\ &- \frac{\mu}{4\omega} \sin 3\omega t - \frac{5\mu^2}{96\omega^2} \cos 5\omega t + o(\mu^2) \end{aligned} \quad (3-52)$$

$$\omega^2 = 1 - \frac{1}{8} \mu^2 + o(\mu^2) \quad (3-53)$$

For $\mu \rightarrow 0$ nærmer løsningen sig til $\omega = 1$, $x(t) = 2 \cos t$. Dette bekræfter den heuristiske løsningsantagelse (2-113), (2-114).

Det er bemærkelsesværdigt, at perturbationsmetoden bestemmer værdien $A = 2$ uafhængig af μ og af antallet af led, der medtages i perturbationsrækken (3-20). Dette må betyde, at trajektorien for den eksakte periodiske bevægelse må skære x-aksen i faseplanen i $(x, y) = (2, 0)$, uafhængig af størrelsen af μ . Argumentet forudsætter, at perturbationsrækken konvergerer.

Også i dette tilfælde kan Lindstedt's metode fortsættes til bestemmelse af løsninger af vilkårlig høj orden.

3.3 Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky's metode.

En alternativ metode til opnåelse af løsninger af kvasi-harmoniske systemer blev angivet af Krylov og Bogoliubov [2]. En mere rigoristisk matematisk formulering, der muliggjorde en trinvis bestemmelse af højere ordens approksimationer, blev senere udviklet af Bogoliubov og Mitropolsky [3]. Vi skal derfor betegne fremgangsmåden som Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky's metode. Denne er den mest generelle af de her betragtede kvantitative metoder.

Først skal angives den oprindelige formulering af Krylov og Bogoliubov. Denne benævnes undertiden *midlingsmetoden* i litteraturen. Dernæst viser vi, at midlingsmetoden fremkommer som 1. ordens approksimation ved Bogoliubov og Mitropolsky's udvidelse af metoden.

Vi betragter den kvasi-harmoniske differentiaalligning

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu f(x, \dot{x}) &= 0 \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-54)$$

For $\mu = 0$ er løsningen til (3-54) givet ved

$$x(t) = A \cos \Phi \quad (3-55)$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin \Phi \quad (3-56)$$

hvor

$$\Phi(t) = \omega_0 t + \Psi \quad (3-57)$$

For $\mu = 0$ er A og Ψ i (3-55), (3-56), (3-57) konstanter, der fastlægges af begyndelsesbetingelserne. For $\mu \neq 0$ bliver A og Ψ i almindelighed ikke længere konstante i tiden, når disse bestemmes af (3-55), (3-56) med de eksakte løsninger $x(t)$, $\dot{x}(t)$ indsat på venstresiderne. For $|\mu| \ll 1$ er det imidlertid rimelig at forvente, at $A(t)$ og $\Psi(t)$ varierer langsomt med tiden, svarende til at \dot{A} og $\dot{\Psi}$ er relativt små størrelser.

Ved differentiation af (3-55) følger ved anvendelse af (3-56)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{A} \cos \Phi - A(\omega_0 + \dot{\Psi}) \sin \Phi \Rightarrow \\ \dot{A} \cos \Phi - A\dot{\Psi} \sin \Phi &= 0 \end{aligned} \quad (3-58)$$

Ved differentiation af (3-56) følger

$$\ddot{x}(t) = -\dot{A}\omega_0 \sin \Phi - A\omega_0(\omega_0 + \dot{\Psi}) \cos \Phi \quad (3-59)$$

Ved (3-55), (3-56), (3-59) antager (3-54) formen

$$-\dot{A}\omega_0 \sin \Phi - A\omega_0 \dot{\Psi} \cos \Phi = -\mu f(A \cos \Phi, -A\omega_0 \sin \Phi) \quad (3-60)$$

(3-58) ganges med $\omega_0 \cos \Phi$ og (3-60) ganges med $-\sin \Phi$, hvorefter ligningerne adderes. Herved findes

$$\omega_0 \dot{A} = \mu f(A \cos \Phi, -A\omega_0 \sin \Phi) \sin \Phi \quad (3-61)$$

Dernæst ganges (3-58) med $-\omega_0 \sin \Phi$ og (3-60) ganges med $-\cos \Phi$, hvorefter ligningerne adderes. Herved findes

$$A\omega_0 \dot{\Psi} = \mu f(A \cos \Phi, -A\omega_0 \sin \Phi) \cos \Phi \quad (3-62)$$

Ligningerne (3-61), (3-62) er eksakte differentialligninger for problemet. Vi har blot erstattet differentialligningen (3-54) af 2. orden med 2 ækvivalente 1. ordens differentialligninger, udtrykt i tilstandsvariable (A, Ψ) , der er entydigt forbundet med de oprindelige tilstandsvariable (x, \dot{x}) ved (3-55), (3-56), (3-57).

For $|\mu| \ll 1$ bliver højresiderne af (3-61) og (3-62) relativt små størrelser, hvorfor \dot{A} og $\dot{\Psi}$ må være relativt små størrelser. A og Ψ ændrer sig derfor ikke meget i løbet af en periode $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$. Den grundlæggende ide i midlingsmetoden er nu at erstatte leddene på højresiden af (3-61) og (3-62) med disse ledes tidslige middelværdi over 1 periode $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, idet A og Ψ holdes konstant under midlingen. (3-61) og (3-62) erstattes herefter af differentialligningerne

$$\dot{A} \simeq \mu a_1(A) \quad (3-63)$$

$$\dot{\Psi} \simeq \mu b_1(A) \quad (3-64)$$

hvor

$$\begin{aligned} a_1(A) &= \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(A \cos \Phi, -A\omega_0 \sin \Phi) \sin \Phi dt \Rightarrow \\ a_1(A) &= \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(A \cos \Phi, -A\omega_0 \sin \Phi) \sin \Phi d\Phi \end{aligned} \quad (3-65)$$

$$\begin{aligned} b_1(A) &= \frac{1}{A\omega_0} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(A \cos \Phi, -A\omega_0 \sin \Phi) \cos \Phi dt \Rightarrow \\ b_1(A) &= \frac{1}{A\omega_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(A \cos \Phi, -A\omega_0 \sin \Phi) \cos \Phi d\Phi \end{aligned} \quad (3-66)$$

I (3-65), (3-66) er (3-57) anvendt ved substitutionen af integrationsvariablen.

(3-63) og (3-64) skal løses mht. et sæt begyndelsesbetingelser (A_0, Ψ_0) , der bestemmes ved at sætte $t = 0$ i (3-55), (3-56), (3-57). Herved

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= A_0 \cos \Psi_0 \\ \dot{x}_0 &= -A_0 \omega_0 \sin \Psi_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \Psi_0 &= -\frac{1}{\omega_0} \frac{\dot{x}_0}{x_0}, \quad x_0 \neq 0 \\ A_0 &= \left(x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3-67)$$

Ved transiente forløb mod eller bort fra periodiske bevægelser eller ligevægtspunkter, er løsningen til (3-63) givet ved

$$\int_{A_0}^{A(t)} \frac{du}{a_1(u)} = \mu t \quad (3-68)$$

(3-68) giver en sammenhæng mellem $A(t)$ og t . Når $A(t)$ er bestemt, kan $\Psi(t)$ bestemmes udfra (3-64) ved løsning af kvadraturet

$$\Psi(t) = \Psi_0 + \mu \int_0^t b_1(A(t)) dt \quad (3-69)$$

Det følger af (3-55), (3-56), (3-57), at periodiske bevægelser nødvendigvis må opfylde, at $A(t) = c_1$ og $\Psi(t) = \Psi_0 + c_2 t$, hvor c_1 og c_2 er konstanter. Mulige periodiske bevægelser må derfor have $\dot{A} = 0$, hvorfor amplituden A af disse iht. (3-63) bestemmes som løsning til ligningen

$$a_1(A) = 0 \quad (3-70)$$

Når A opfylder (3-70), bliver $A(t)$ og dermed $b_1(A)$ konstante størrelser. Betingelsen til $\Psi(t)$ er dermed automatisk opfyldt iht. (3-64). Den cykliske egenfrekvens i den periodiske bevægelse bliver

$$\omega = \omega_0 + \mu b_1(A) \quad (3-71)$$

Vi vil nu generalisere metoden, så højere ordens tilnærmelser kan bestemmes ved trinvis beregning.

I stedet for (3-55), antages $x(t)$ nu givet ved

$$x(t) = A \cos \Phi + \mu x^{(1)}(A, \Phi) + \mu^2 x^{(2)}(A, \Phi) + \dots \quad (3-72)$$

hvor $x^{(i)}, i = 1, \dots$ alle er periodiske funktioner af Φ med perioden 2π . Φ er stadig givet ved (3-57).

Til erstatning af (3-63), (3-64), bestemmes $A(t)$ og $\Phi(t)$ nu som løsninger til differentialligningerne

$$\dot{A} = \mu a_1(A) + \mu^2 a_2(A) + \dots, \quad A(0) = A_0 \quad (3-73)$$

$$\dot{\Psi} = \mu b_1(A) + \mu^2 b_2(A) + \dots, \quad \Psi(0) = \Psi_0 \quad (3-74)$$

Vi skal bestemme de ukendte funktioner $x^{(i)}(A, \Phi), a_i(A), b_i(A), i = 1, 2, \dots$ tillige med begyndelsesbetingelserne A_0, Ψ_0 . Antag midlertidigt dette gjort.

Ved transiente forløb mod eller bort fra periodiske bevægelser er løsningen til (3-73) givet ved, sammenlign med (3-68)

$$\int_{A_0}^{A(t)} \frac{du}{a_1(u) + \mu a_2(u) + \dots} = \mu t \quad (3-75)$$

(3-75) bestemmer $A(t)$. $\Psi(t)$ følger dernæst af (3-74)

$$\Psi(t) = \Psi_0 + \int_0^t (\mu b_1(A(t)) + \mu^2 b_2(A(t)) + \dots) dt \quad (3-76)$$

Den endelige løsning $x(t)$ bestemmes dernæst ved indsætning af $A(t)$ og $\Psi(t)$ i (3-72).

Fordi $x^{(i)}(A, \Phi), i = 1, 2, \dots$ er periodiske funktioner af Φ , bliver (3-72) periodisk, hvis og kun hvis $A \equiv c_1$. Periodiske bevægelser er derfor karakteriseret ved $\dot{A} = 0$. Hver af disse svarer derfor til en bestemt værdi A , der findes som løsning til ligningen

$$a_1(A) + \mu a_2(A) + \dots = 0 \quad (3-77)$$

Idet $A(t)$ er konstant for en given periodisk bevægelse, følger af (3-74), at $\Psi(t) = \Psi_0 + (\mu b_1(A) + \mu^2 b_2(A) + \dots)t$. Den cykliske frekvens ω i den periodiske bevægelse bliver herved iht. (3-57)

$$\omega = \omega_0 + \mu b_1(A) + \mu^2 b_2(A) + \dots \quad (3-78)$$

Vi skal herefter bestemme de ukendte funktioner $x^{(i)}(A, \Phi), i = 1, 2, \dots$. For disse formuleres partielle differentialligninger og tilhørende begyndelsesbetingelser ved en perturbationsanalyse. Det er afgørende for gyldigheden af (3-77) og (3-78), at

$x^{(i)}(A, \Phi)$ bliver periodiske funktioner i Φ . Dette opnås ved at kræve, at differentiaalligningerne er fri for sekulære led af typen $\cos \Phi$ og $\sin \Phi$. Det viser sig, at disse betingelser bestemmer funktionerne $a_i(A)$ og $b_i(A)$, $i = 1, 2, \dots$

Vi får brug for perturbationsrækker af typen (3-72) for \ddot{x} og $f(x, \dot{x})$. Ved (3-73), (3-74) haves

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial x}{\partial \Phi} \dot{\Phi} = \\ &= \left(\cos \Phi + \mu \frac{\partial x^{(1)}}{\partial A} + \dots \right) (\mu a_1 + \mu^2 a_2 + \dots) \\ &+ \left(-A \sin \Phi + \mu \frac{\partial x^{(1)}}{\partial \Phi} + \mu^2 \frac{\partial x^{(2)}}{\partial \Phi} + \dots \right) (\omega_0 + \mu b_1 + \mu^2 b_2 + \dots) = \\ &= -A \omega_0 \sin \Phi + \mu \left(a_1 \cos \Phi - A b_1 \sin \Phi + \omega_0 \frac{\partial x^{(1)}}{\partial \Phi} \right) \\ &+ \mu^2 \left(a_2 \cos \Phi + a_1 \frac{\partial x^{(1)}}{\partial A} - A b_2 \sin \Phi + b_1 \frac{\partial x^{(1)}}{\partial \Phi} + \omega_0 \frac{\partial x^{(2)}}{\partial \Phi} \right) + \dots \quad (3-79)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= \frac{\partial^2 x}{\partial A^2} (\dot{A})^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial A \partial \Phi} \dot{A} \dot{\Phi} + \frac{\partial^2 x}{\partial \Phi^2} (\dot{\Phi})^2 + \frac{\partial x}{\partial A} \frac{\partial \dot{A}}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial x}{\partial \Phi} \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial A} \dot{A} = \\ &= \left(\mu \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial A^2} + \dots \right) (\mu a_1 + \dots)^2 \\ &+ 2 \left(-\sin \Phi + \mu \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial A \partial \Phi} + \dots \right) (\mu a_1 + \mu^2 a_2 + \dots) (\omega_0 + \mu b_1 + \mu^2 b_2 + \dots) \\ &+ \left(-A \cos \Phi + \mu \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial \Phi^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial \Phi^2} + \dots \right) (\omega_0 + \mu b_1 + \mu^2 b_2 + \dots)^2 \\ &+ \left(\cos \Phi + \mu \frac{\partial x^{(1)}}{\partial A} + \dots \right) \left(\mu \frac{da_1}{dA} + \dots \right) (\mu a_1 + \dots) \\ &+ \left(-A \sin \Phi + \mu \frac{\partial x^{(1)}}{\partial \Phi} + \dots \right) \left(\mu \frac{db_1}{dA} + \dots \right) (\mu a_1 + \dots) = \\ &= -A \omega_0^2 \cos \Phi + \mu \left(-2 \omega_0 a_1 \sin \Phi - 2 \omega_0 b_1 A \cos \Phi + \omega_0^2 \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial \Phi^2} \right) \\ &+ \mu^2 \left((-2 a_1 b_1 - 2 a_2 \omega_0 - A a_1 \frac{db_1}{dA}) \sin \Phi + (-b_1^2 A - 2 \omega_0 b_2 A + a_1 \frac{da_1}{dA}) \cos \Phi \right. \\ &\left. + 2 \omega_0 b_1 \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial \Phi^2} + 2 a_1 \omega_0 \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial A \partial \Phi} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial \Phi^2} \right) + \dots \quad (3-80)\end{aligned}$$

Der indføres betegnelserne

$$\left. \begin{aligned}x^{(0)}(t) &= A \cos \Phi \\ \dot{x}^{(0)}(t) &= -A \omega_0 \sin \Phi\end{aligned} \right\} \quad (3-81)$$

Dernæst Taylorudvikles $f(x, \dot{x})$ ud fra $(x, \dot{x}) = (x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})$. Herved haves ved (3-72) og (3-79)

$$\begin{aligned} f(x, \dot{x}) &= f(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}) \\ &+ f_{,x}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})(x - x^{(0)}) + f_{,\dot{x}}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})(\dot{x} - \dot{x}^{(0)}) + \dots = f(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}) \\ &+ \mu \left(f_{,x}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})x^{(1)} + f_{,\dot{x}}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})(a_1 \cos \Phi - Ab_1 \sin \Phi + \omega_0 \frac{\partial x^{(1)}}{\partial \Phi}) \right) + \dots \end{aligned} \quad (3-82)$$

(3-72), (3-80), (3-82) indsættes dernæst i (3-54). Led med fælles faktor μ^n samles. Herved findes

$$\begin{aligned} &\mu \left(\omega_0^2 \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial \Phi^2} + \omega_0^2 x^{(1)} - 2\omega_0 a_1 \sin \Phi - 2\omega_0 b_1 A \cos \Phi + f(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}) \right) \\ &+ \mu^2 \left(\frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial \Phi^2} + \omega_0^2 x^{(2)} - (2a_1 b_1 + 2a_2 \omega_0 + A a_1 \frac{db_1}{dA}) \sin \Phi \right. \\ &- (b_1^2 A + 2\omega_0 b_2 A - a_1 \frac{da_1}{dA}) \cos \Phi + 2\omega_0 b_1 \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial \Phi^2} + 2a_1 \omega_0 \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial A \partial \Phi} \\ &\left. + f_{,x}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})x^{(1)} + f_{,\dot{x}}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})(a \cos \Phi - Ab_1 \sin \Phi + \omega_0 \frac{\partial x^{(1)}}{\partial \Phi}) \right) + \dots \end{aligned} \quad (3-83)$$

Faktorerne til μ^n i (3-83) er uafhængig af μ . Med den sædvanlige argumentation udledes heraf differentiaalligningssystemet

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial \Phi^2} + \omega_0^2 x^{(1)} = 2\omega_0 a_1 \sin \Phi + 2\omega_0 b_1 A \cos \Phi - f(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}) \quad (3-84a)$$

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial \Phi^2} + \omega_0^2 x^{(2)} &= (2a_1 b_1 + 2a_2 \omega_0 + A a_1 \frac{db_1}{dA}) \sin \Phi \\ &+ (b_1^2 A + 2\omega_0 b_2 A - a_1 \frac{da_1}{dA}) \cos \Phi - 2\omega_0 b_1 \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial \Phi^2} - 2a_1 \omega_0 \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial A \partial \Phi} \\ &- f_{,x}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})x^{(1)} - f_{,\dot{x}}(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})(a_1 \cos \Phi - Ab_1 \sin \Phi + \omega_0 \frac{\partial x^{(1)}}{\partial \Phi}) \end{aligned} \quad (3-84b)$$

(3-84) er partielle differentiaalligninger til bestemmelse af $x^{(i)}$ som funktion af Φ . $A(t)$ på højresiderne er herved at betragte som konstanter ved løsningen af disse ligninger. Differentiaalligningerne skal løses mht. et sæt begyndelsesbetingelser. Disse fastlægges ved samme argumentation, som førte til (3-5).

For $t = 0$ må koefficienterne $x^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots$ i (3-72) alle være 0, hvis ligningen skal gælde for vilkårligt μ . Tilsvarende må koefficienterne til μ^n , $n = 1, 2, \dots$ i (3-79) alle være lig 0 for $t = 0$. For $t = 0$ er $A(0) = A_0$ og $\Phi(0) = \Psi_0$. Heraf udledes begyndelsesbetingelserne for $x^{(i)}(A, \Phi)$ som funktion af Φ

$$\left. \begin{aligned} x^{(1)}(A_0, \Psi_0) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \Phi} x^{(1)}(A_0, \Psi_0) &= \frac{1}{\omega_0} (-a_1(A_0) \cos \Psi_0 + A_0 b_1(A_0) \sin \Psi_0) \end{aligned} \right\} \quad (3-85a)$$

$$\left. \begin{aligned} x^{(2)}(A_0, \Psi_0) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \Phi} x^{(2)}(A_0, \Psi_0) &= \frac{1}{\omega_0} (-a_2(A_0) \cos \Psi_0 - a_1(A_0) \frac{\partial}{\partial A} x^{(1)}(A_0, \Psi_0) \\ &+ A_0 b_2(A_0) \sin \Psi_0 - b_1(A_0) \frac{\partial}{\partial \Phi} x^{(1)}(A_0, \Psi_0)) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (3-85b)$$

A_0 og Ψ_0 fastlægges ved at 0. ordensløsningen (3-81) skal tilfredsstille samme begyndelsesbetingelser som den samlede løsning. Heraf følger, at (A_0, Ψ_0) er bestemt ved (3-67).

Løsningsproceduren startes med, at (A_0, Ψ_0) bestemmes af (3-67).

$f(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}) = f(A \cos \Phi, -A\omega_0 \sin \Phi)$ i (3-84a) er åbenbart en periodisk funktion af Φ med perioden 2π , og kan følgelig udvikles i en Fouierrække. Der gælder

$$f(A \cos \Phi, -A\omega_0 \sin \Phi) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\Phi + D_n \sin n\Phi) \quad (3-86)$$

$$C_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \cos \Phi, -A\omega_0 \sin \Phi) \cos n\Phi d\Phi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3-87a)$$

$$D_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \cos \Phi, -A\omega_0 \sin \Phi) \sin n\Phi d\Phi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3-87b)$$

(3-86) indsættes i (3-84a). Koefficienterme til $\sin \Phi$ og $\cos \Phi$ må herefter begge være lig 0, da løsningen $x^{(1)}(A, \Phi)$ ellers bliver en ikke-periodisk funktion af Φ . Dette fører til betingelsesligningerne

$$\left. \begin{aligned} 2\omega_0 a_1 - D_1 &= 0 \\ 2\omega_0 b_1 A - C_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$a_1(A) = \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(A \cos \Phi, -A\omega_0 \sin \Phi) \sin \Phi d\Phi \quad (3-88)$$

$$b_1(A) = \frac{1}{A\omega_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(A \cos \Phi, -A\omega_0 \sin \Phi) \cos \Phi d\Phi \quad (3-89)$$

(3-88), (3-89) er identisk til (3-65), (3-66), hvilket netop viser, at midlingsmetoden repræsenterer en 1. ordens approksimation til Bogoliubov og Mitropolsky's metode.

Når $a_1(A)$ og $b_1(A)$ er bestemt, kan begyndelsesbetingelserne for 1. ordensløsningen bestemmes af (3-85a). Herefter kan en entydig periodisk løsning for $x^{(1)}(A, \Phi)$ bestemmes af den resulterende ligning (3-84a).

Med a_1 og b_1 bestemt, og $x^{(1)}$ bestemt som en periodisk funktion, bliver højresiden af (3-84b) en kendt periodisk funktion af Φ . Ved igen at kræve, at koefficienterne til de sekulære led er lig 0, kan $a_2(A)$ og $b_2(A)$ bestemmes. Dernæst kan begyndelsesbetingelserne (3-85b) udregnes, og $x^{(2)}$ kan løses entydigt af (3-84b).

Det fremgår, at en trinvis løsning af ligningerne kan fortsættes ubegrænset.

Eksempel 3.3: Egensvingninger af Duffing's differentialligning ved Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky's metode.

Duffingligningen (3-12) søges løst vha. Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky's metode. Begyndelsesbetingelserne er $(x_0, \dot{x}_0) = (A_0, 0)$

Af (3-67) følger

$$\left. \begin{aligned} A(0) &= A_0 \\ \Phi_0 &= \Psi_0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-90)$$

I det foreliggende tilfælde er $f(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)}) = \omega_0^2 (x^{(0)})^3$. (3-84) antager herved formen

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial \Phi^2} + \omega_0^2 x^{(1)} &= 2\omega_0 a_1 \sin \Phi + 2\omega_0 b_1 A \cos \Phi - \omega_0^2 A^3 \cos^3 \Phi = \\ &= A(2\omega_0 b_1 - \frac{3}{4}\omega_0^2 A^2) \cos \Phi + 2\omega_0 a_1 \sin \Phi - \frac{1}{4}\omega_0^2 A^3 \cos 3\Phi \end{aligned} \quad (3-91a)$$

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial \Phi^2} + \omega_0^2 x^{(2)} &= (2a_1 b_1 + 2a_2 \omega_0 + A a_1 \frac{db_1}{dA}) \sin \Phi \\ &+ (b_1^2 A + 2\omega_0 b_2 A - a_1 \frac{da_1}{dA}) \cos \Phi - 2\omega_0 b_1 \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial \Phi^2} - 2a_1 \omega_0 \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial A \partial \Phi} - 3\omega_0^2 (x^{(0)})^2 x^{(1)} \end{aligned} \quad (3-91b)$$

De sekulære led på højresiden af (3-91a) forsvinder, hvis

$$b_1 = \frac{3}{8}\omega_0 A^2 \quad (3-92)$$

$$a_1 = 0 \quad (3-93)$$

Ved (3-90), (3-92), (3-93) antager (3-85a) og (3-91a) formen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 x^{(1)}}{\partial \Phi^2} + x^{(1)} &= -\frac{1}{4}A^3 \cos 3\Phi \\ x^{(1)}(A_0, 0) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial \Phi} x^{(1)}(A_0, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-94)$$

Løsningen til (3-94) er givet ved

$$x^{(1)}(A, \Phi) = \frac{1}{32} A^3 (\cos 3\Phi - \cos \Phi) \quad (3-95)$$

Ved (3-92), (3-93), (3-95) antager (3-91b) herved formen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial \Phi^2} + x^{(2)} &= \frac{1}{\omega_0^2} \left(2a_2 \omega_0 \sin \Phi + \left(\frac{9}{64} \omega_0^2 A^5 + 2\omega_0 b_2 A \right) \cos \Phi \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{128} \omega_0^2 A^5 (-9 \cos 3\Phi + \cos \Phi) - \frac{3}{32} \omega_0^2 A^5 \cos^2 \Phi (\cos 3\Phi - \cos \Phi) \right) = \\ &= \frac{1}{\omega_0^2} \left(2a_2 \omega_0 \sin \Phi + \left(\frac{21}{128} \omega_0^2 A^5 + 2\omega_0 b_2 A \right) \cos \Phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{16} \omega_0^2 A^5 \cos 3\Phi - \frac{3}{128} \omega_0^2 A^5 \cos 5\Phi \right) \end{aligned} \quad (3-96)$$

Der er her benyttet $\cos^2 x (\cos 3x - \cos x) = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{1}{4} \cos 5x$.

De sekulære led på højresiden af (3-96) forsvinder, når

$$b_2 = -\frac{21}{256} \omega_0 A^4 \quad (3-97)$$

$$a_2 = 0 \quad (3-98)$$

Ved (3-90), (3-92), (3-93), (3-95), (3-97), (3-98) antager (3-85b), (3-96) formen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 x^{(2)}}{\partial \Phi^2} + x^{(2)} &= \frac{3}{16} A^5 \cos 3\Phi - \frac{3}{128} A^5 \cos 5\Phi \\ x^{(2)}(A_0, 0) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial \Phi} x^{(2)}(A_0, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-99)$$

(3-99) har løsningen

$$x^{(2)}(A, \Phi) = -\frac{3}{128} A^5 (\cos 3\Phi - \cos \Phi) + \frac{1}{1024} A^5 (\cos 5\Phi - \cos \Phi) \quad (3-100)$$

Til og med 2. orden i μ antager (3-72), (3-73), (3-74) herved formen

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos \Phi + \mu \frac{1}{32} A^3 (\cos 3\Phi - \cos \Phi) \\ &+ \mu^2 \left(-\frac{3}{128} A^5 (\cos 3\Phi - \cos \Phi) + \frac{1}{1024} A^5 (\cos 5\Phi - \cos \Phi) \right) + o(\mu^2) \end{aligned} \quad (3-101)$$

$$\dot{A} = 0, \quad A(0) = A_0 \quad (3-102)$$

$$\dot{\Psi}(t) = \mu \frac{3}{8} A^2 - \mu^2 \frac{21}{256} A^4 + o(\mu^2), \quad \Psi(0) = 0 \quad (3-103)$$

(3-102) og (3-103) har løsningen

$$A = A_0 \quad (3-104)$$

$$\Phi(t) = \omega t \quad (3-105)$$

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \mu \frac{3}{8} A_0^2 - \mu^2 \frac{21}{256} A_0^4 \right) + o(\mu^2) \quad (3-106)$$

Af (3-106) følger

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \mu \frac{3}{4} A^2 - \mu^2 \frac{3}{128} A^4 \right) + o(\mu^2) \quad (3-107)$$

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 - \mu \frac{3}{4} A^2 + \mu^2 \frac{75}{128} A^4 + o(\mu^2) \quad (3-108)$$

(3-107) er identisk med (3-41). Når (3-108) indsættes i (3-40), og led til og med 2. orden i μ bibeholdes, bliver (3-40) identisk med (3-101) med $\Phi(t)$ givet ved (3-105). Til og med 2. orden i μ giver Lindstedt's og Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky's metode samme resultat.

3.4 Tvungne svingninger af kvasi-harmoniske systemer. Hopfænomener.

Vi skal betragte tvungne svingninger af et viskøst dæmpet Duffingssystem under påvirkning af en ydre harmonisk varierende kraft

$$\ddot{x} + 2\mu a \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2(1 + \mu x^2)x = \mu p_0 \cos \omega t, \quad |\mu| \ll 1 \quad (3-109)$$

Dæmpningsforholdet ved lineære dæmpede egensvingninger er

$$\zeta = \mu a \quad (3-110)$$

Systemet (3-109) antages kvasi-harmonisk. Dette indebærer, at $\zeta \ll 1$, svarende til at systemet er svagt dæmpet.

(3-109) vides for $\zeta > 0$ at besidde mindst en periodisk løsning med perioden $T = 2\pi/\omega$. Vi vil bestemme disse ved en modifikation af Lindstedt's metode.

Ikke-lineariteten har primært betydning, når flytningen x er relativt stor. Dette forekommer for systemet (3-109) kun ved resonanspåvirkning, dvs. når $\omega \simeq \omega_0$. Vi sætter derfor

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \mu \alpha_1 \quad (3-111)$$

I forhold til løsningsantagelsen (3-21) ved Lindstedt's metode, er parameteren α_1 i (3-111) nu en kendt størrelse, da ω, ω_0, μ er kendte størrelser.

Løsningen til (3-109) søges på formen

$$x(t) = x^{(0)}(t) + \mu x^{(1)}(t) + \mu^2 x^{(2)}(t) + \dots \quad (3-112)$$

hvor $x^{(i)}(t)$ bestemmes som periodiske funktioner med perioden $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Differentialligningssystemet til bestemmelse af $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots$ er herved givet ved (3-24). I det foreliggende tilfælde er $f(x, \dot{x}, t) = 2a\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x^3 - p_0 \cos \omega t$, og $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = 0$. De resulterende ligninger bliver herved

$$\ddot{x}^{(0)} + \omega^2 x^{(0)} = 0 \quad (3-113a)$$

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} = -2a\omega_0\dot{x}^{(0)} - \omega_0^2 (x^{(0)})^3 + p_0 \cos \omega t + \alpha_1 x^{(0)} \quad (3-113b)$$

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega^2 x^{(2)} = -3\omega_0^2 (x^{(0)})^2 x^{(1)} - 2a\omega_0\dot{x}^{(1)} + \alpha_1 x^{(1)} \quad (3-113c)$$

(3-113a) har løsningen

$$x^{(0)}(t) = A \cos(\omega t + \Psi) \quad (3-114)$$

Nu er

$$\begin{aligned} p_0 \cos \omega t &= p_0 \cos(\omega t + \Psi - \Psi) = \\ p_0 \cos \Psi \cos(\omega t + \Psi) + p_0 \sin \Psi \sin(\omega t + \Psi) \end{aligned} \quad (3-115)$$

Ved indsætning af (3-114), (3-115), antager (3-113b) formen

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} &= 2a\omega_0\omega A \sin(\omega t + \Psi) - \omega_0^2 A^3 \left(\frac{3}{4} \cos(\omega t + \Psi) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t + 3\Psi) \right) \\ &+ p_0 \cos \Psi \cos(\omega t + \Psi) + p_0 \sin \Psi \sin(\omega t + \Psi) + \alpha_1 A \cos(\omega t + \Psi) = \\ &(p_0 \cos \Psi + \alpha_1 A - \frac{3}{4} \omega_0^2 A^3) \cos(\omega t + \Psi) + (p_0 \sin \Psi + 2a\omega_0\omega A) \sin(\omega t + \Psi) \\ &- \frac{1}{4} \omega_0^2 A^3 \cos(3\omega t + 3\Psi) \end{aligned} \quad (3-116)$$

Løsningen til (3-116) bliver kun periodisk, hvis koefficienterne til $\cos(\omega t + \Psi)$ og $\sin(\omega t + \Psi)$ er lig 0, svarende til at der ingen resonanspåvirkning forekommer. Dette indebærer følgende betingelsesligninger, der fastlægger fasen Ψ og amplituden A i (3-114)

$$\left. \begin{aligned} p_0 \cos \Psi &= -\alpha_1 A + \frac{3}{4} \omega_0^2 A^3 \\ p_0 \sin \Psi &= -2a\omega_0\omega A \end{aligned} \right\} \quad (3-117)$$

Ved anvendelse af (3-110) og (3-111) kan (3-117) skrives

$$\mu p_0 \cos \Psi = (\omega_0^2 - \omega^2) A + \frac{3}{4} \mu \omega_0^2 A^3 \quad (3-118)$$

$$\mu p_0 \sin \Psi = -2\zeta \omega_0 \omega A \quad (3-119)$$

Af (3-118) og (3-119) følger

$$\operatorname{tg} \Psi = -\frac{2\zeta \omega_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3}{4}\mu \omega_0^2 A^2} \quad (3-120)$$

$$(\mu p_0)^2 = \left(4\zeta^2 \omega_0^2 \omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3}{4}\mu \omega_0^2 A^2)^2 \right) A^2 \quad (3-121)$$

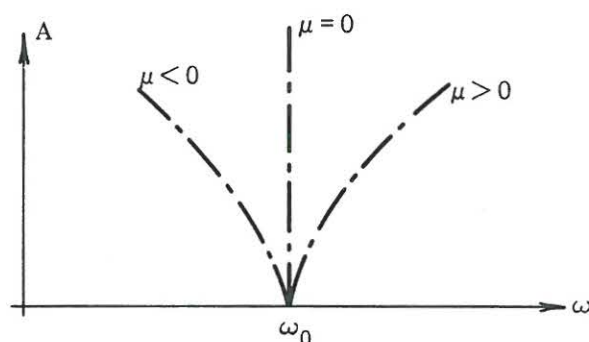
Man starter med at bestemme A af (3-121), hvorefter Ψ bestemmes af (3-120).

Når (3-117) gælder, er den fuldstændige løsning til (3-116) herefter givet ved

$$x^{(1)}(t) = \frac{1}{32} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} A^3 \cos(3\omega t + 3\Psi) + A_1 \cos(\omega t + \Psi_1) \quad (3-122)$$

Amplituden A_1 og fasen Ψ_1 er endnu ukendt. (3-114) og (3-122) indsættes på højresiden af (3-113c). A_1 og Ψ_1 bestemmes nu ved at kræve, at de sekulære led på højresiden af (3-113c) forsvinder. Herefter er 1. ordensløsningen fastlagt. I 2. ordensløsningen bestemt af den resulterende ligning (3-113c), vil der herefter optræde et led $A_2 \cos(\omega t + \Psi_2)$. A_2 og Ψ_2 bestemmes ved at kræve, at de sekulære led på højresiden af 3. ordens differentilligningen skal forsvinde. Processen kan fortsættes ubegrænset.

Vi skal i resten af dette afsnit undersøge den opnåede 0. ordensløsning (3-114) med A og Ψ bestemt ved (3-120), (3-121)



Figur 3.1: Sammenhæng mellem egenfrekvens og amplitude for moderat ikke-lineære Duffingoscillatorer.

$\zeta = 0 \wedge p_0 = 0$ svarer til udæmpede egensvingninger af systemet (3-109). Disse bestemmes dermed af (3-121) for $p_0 = \zeta = 0$, der herved antager formen

$$0 = (\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3}{4}\mu\omega_0^2 A^2)^2 A^2 \Rightarrow$$

$$A = 0 \quad (3-123)$$

eller

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\mu\omega_0^2 A^2 \quad (3-124)$$

(3-123) svarer til den trivielle løsning. (3-124) er identisk med (3-41), når led af 2. og højere orden i μ ignoreres.

Relationerne (3-41) og (3-124) er illustreret på figur 3.1 for tilfældene $\mu < 0$, $\mu = 0$, $\mu > 0$, svarende til henholdsvis en blød, en lineær og en hård elastisk fjeder. For den lineære fjeder er amplituden uafhængig af amplituden. Egensvingningskurverne for den bløde og den hårde fjeder fremkommer ved afbøjning til venstre og til højre af egensvingningskurven for lineære fjeder.

Dernæst betragtes tilfældet $\zeta = 0 \wedge p_0 \neq 0$, svarende til stationære tvungne svingninger under harmonisk påvirkning. (3-118), (3-119) fører i dette tilfælde til betingelsesligningen

$$\sin \Psi = 0 \Rightarrow$$

$$\cos \Psi = \pm 1 \quad (3-125)$$

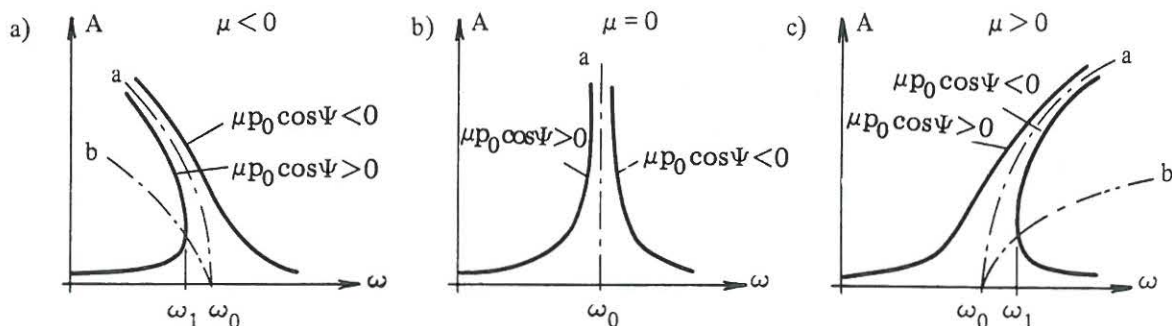
$$(\omega_0^2 - \omega^2)A + \frac{3}{4}\mu\omega_0^2 A^3 = \mu p_0 \cos \Psi \quad (3-126)$$

Mulige bevægelser karakteriseres ved, at der eksisterer positive reelle løsninger til (3-126).

Antag $p_0 \rightarrow \infty \wedge \mu \rightarrow 0$ på en sådan måde, at μp_0 holder sig begrænset. Herved antager (3-126) formen

$$A = \frac{\mu p_0 \cos \Psi}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3-127)$$

(3-127) er den velkendte løsning for et lineært udæmpet system. For $\omega < \omega_0$ er en løsning $A > 0$ kun mulig for $\mu p_0 \cos \Psi > 0$. Tilsvarende for $\omega > \omega_0$ er en positiv løsning A kun mulig for $\mu p_0 \cos \Psi < 0$. Antages $p_0 > 0$, er således $\cos \Psi = 1$ for $\mu > 0$ (hård fjeder), og $\cos \Psi = -1$ for $\mu < 0$ (blød fjeder). Ved passagen af den cykliske egenfrekvens $\omega = \omega_0$ sker et fasespring på $\Delta \Psi = \pi$. Grafen for A som funktion af ω betegnes det *harmoniske amplitudegensvar*. Denne er vist på figur 3.26.



Figur 3.2: Harmonisk amplitudegensvar for udæmpet Duffingoscillator. a) Blød fjeder. b) Lineær fjeder. c) Hård fjeder.

For $\mu \neq 0 \wedge p_0 \neq 0$ repræsenterer (3-126) en 3. gradsligning, der fastlægger sammenhængen mellem A og den cykliske frekvens ω . 3. gradsligningen har 1, 2 eller 3 reelle positive løsninger A , afhængig af $\omega, \omega_0, \mu p_0 \cos \Psi$. Dette svarer til 1, 2 eller 3 mulige periodiske bevægelser. Det kvalitative forløb af løsningerne er vist på figur 3.2a og figur 3.2c for henholdsvis en blød og en hård fjeder. Egensvingningsrelationen (3-124) er vist stiptet som kurve a. Præcis som egensvingningskurverne for den bløde og den hårde fjeder frembringes ved afbøjning til venstre og til højre af egensvingningskurven for den lineære fjeder, frembringes amplitudegensvaret for den bløde og den hårde fjeder ved at afbøje amplitudegensvaret for den lineære fjeder i samme retning.

For den bløde fjeder på figur 3.2a fremgår, at der er 3 mulige periodiske bevægelser for $0 < \omega < \omega_1$, at der er 2 periodiske bevægelser for $\omega = \omega_1 < \omega_0$ og 1 periodisk bevægelse for $\omega > \omega_1$. ω_1 er frekvensen, hvor den nederste amplitudegensvarskurve har lodret tangent.

For den hårde fjeder på figur 3.2c eksisterer 1 periodisk bevægelse for $0 < \omega < \omega_1$, 2 periodiske bevægelser for $\omega = \omega_1 > \omega_0$ og 3 periodiske bevægelser for $\omega_1 < \omega < \infty$. Igen betegner ω_1 frekvensen, hvor den nederste gensvarskurve har lodret tangent.

Vi ønsker at bestemme kurven b på figur 3.2a og figur 3.2c, der angiver det geometriske sted for punkterne med lodret tangent på amplitudegensvarskurverne, der fremkommer, når $\mu p_0 \cos \Psi$ varierer. I (3-126) opfattes $\omega = \omega(A)$ som en funktion af A . (3-126) differentieres derefter implicit mht. A . Herved haves

$$-2\omega \cdot \frac{d\omega}{dA} A + (\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{9}{4} \mu \omega_0^2 A^2 = 0 \quad (3-128)$$

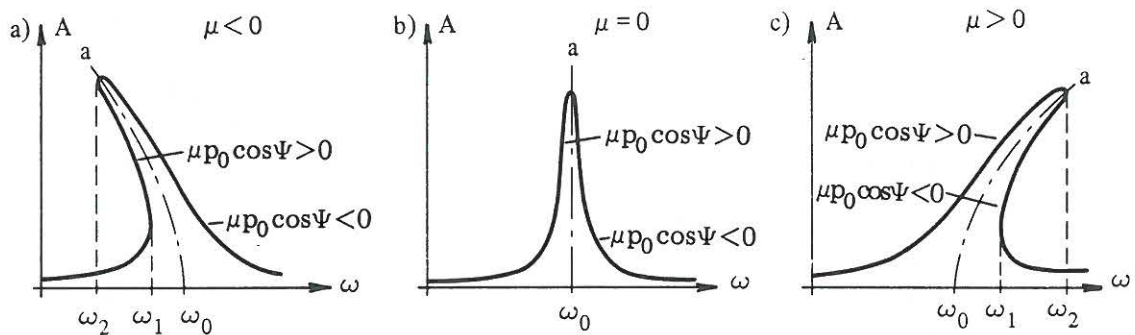
Punktet med lodret tangent på amplitudegensvarskurven er karakteriseret ved, at $\frac{d\omega}{dA} = 0$. Funktionsudtrykket, der fastlægger den søgte kurve er da givet ved

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{9}{4}\mu\omega_0^2 A^2 \quad (3-129)$$

Når der forekommer 3 mulige periodiske bevægelser, fremgår, at amplituden A for den mellemste bevægelse er beliggende under ordinaten på egensvingningskurven a og over ordinaten på kurve b for samme værdi af ω . Ved (3-124) og (3-129) findes herved

$$\begin{aligned} \frac{4}{9\mu} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right) &< A^2 < \frac{4}{3\mu} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right) \Rightarrow \\ \left(\frac{3}{4}\mu A^2 < \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 < \frac{9}{4}\mu A^2 \wedge \mu > 0 \right) &\vee \\ \left(\frac{9}{4}\mu A^2 < \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 < \frac{3}{4}\mu A^2 \wedge \mu < 0 \right) & \end{aligned} \quad (3-130)$$

I henhold til (2-111) er den mellemste bevægelse da instabil. De to andre bevægelser er stabile, men ikke asymptotisk stabile, da systemet er udæmpet.



Figur 3.3: Harmonisk amplitudegensvar for viskøst dæmpet Duffingoscillator. a) Blød fjeder. b) Lineær fjeder. c) Hård fjeder.

For $\mu = 0 \wedge \zeta \neq 0 \wedge \mu p_0 \neq 0$ giver (3-120), (3-121) løsningen

$$\operatorname{tg} \Psi = -\frac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3-131)$$

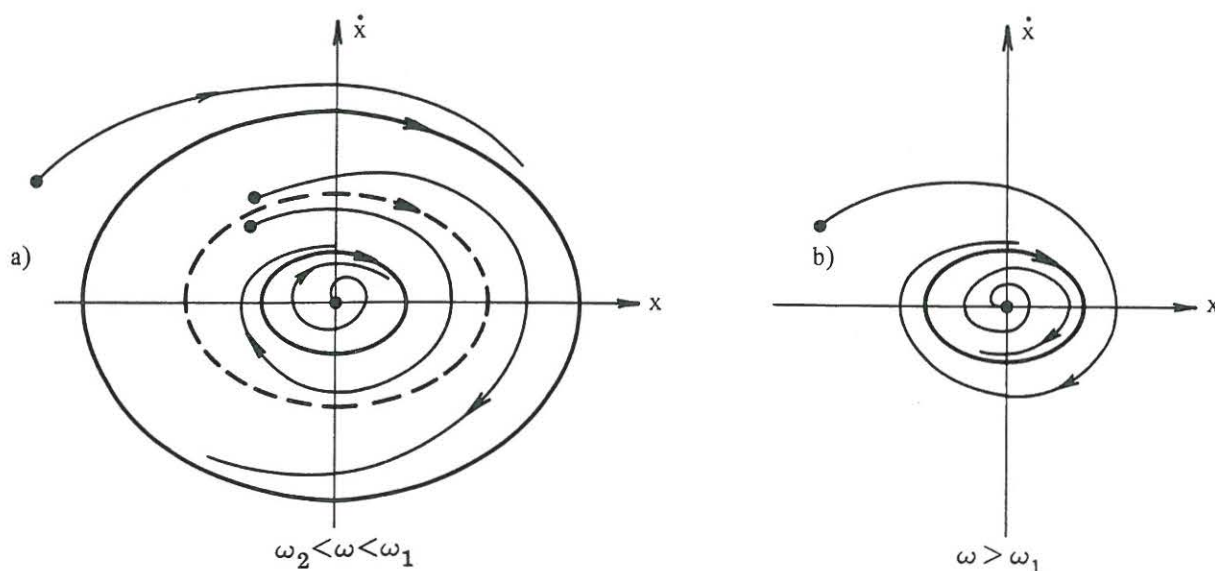
$$A = \frac{|\mu p_0|}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_0^2 \omega^2}} \quad (3-132)$$

(3-131), (3-132) er den velkendte løsning for det harmoniske amplitudegensvar for en lineær viskøst dæmpet oscillator. Fasetilvæksten $\Delta\Psi = \pi$ sker nu kontinuert, når ω gennemløber intervallet $[0, \infty[$, omend den kraftigste faseændring sker i resonansområdet, når $\zeta \ll 1$. Amplitudegensvaret lukker sig nu om egensvingningskurven som vist på figur 3.3b. Løsningen Ψ til (3-131) skal vælges, således at $\mu p_0 \cos \Psi > 0$ for værdier $\omega \ll \omega_0$ og $\mu p_0 \cos \Psi < 0$ for værdier $\omega \gg \omega_0$.

For $\mu \neq 0 \wedge \zeta \neq 0 \wedge p_0 \neq 0$ bestemmes A af (3-121), der er en 3. gradsligning i A^2 . Igen opnåes derfor 1, 2 eller 3 reelle løsninger, hvortil svarer et lignende antal periodiske bevægelser. Analogt til det lineære tilfælde lukker amplitudegensvarskurven sig om egensvingningskurven som vist på figur 3.3a og figur 3.3b. Det fremgår af 3.3a og figur 3.3b, at der nu er 2 cykliske frekvenser ω_1 og ω_2 , hvor amplitudegensvarskurven har lodret tangent.

Som vist på figur 3.3a eksisterer for den bløde fjeder 3 periodiske bevægelser for $\omega_2 < \omega < \omega_1$, $\omega_1 < \omega_0$, hvoraf den mindste og den største er asymptotisk stabile, og den mellemste er instabil. For $\omega = \omega_2$ og $\omega = \omega_1$ er der 2 periodiske bevægelser. For alle andre værdier af ω er der 1 asymptotisk stabil bevægelse.

Tilsvarende som vist på figur 3.3c eksisterer for den hårde fjeder 3 periodiske bevægelser for $\omega_1 < \omega < \omega_2$, $\omega_0 < \omega_1$, hvoraf den mindste og den største er asymptotisk stabile, og den mellemste er instabil.



Figur 3.4: Faseportræt for svagt dæmpet Duffingoscillator med blød fjeder ($\mu < 0$) under harmonisk påvirkning.

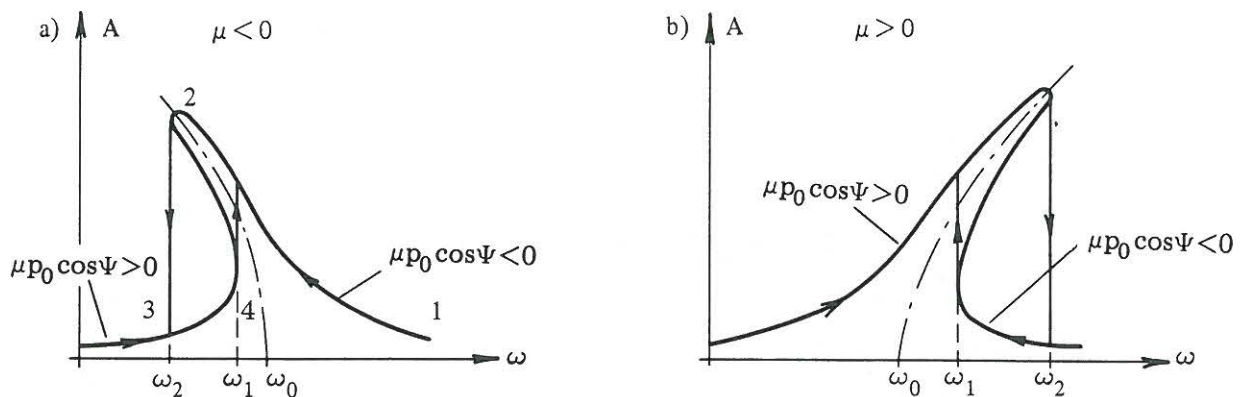
Hvis 0. ordensløsningen (3-114) lægges til grund, fremgår at trajektorierne for de periodiske bevægelser bliver ellipser med halvakser A og $A\omega$.

Faseportrætterne er vist på figur 3.4 for en blød fjeder. Figur 3.4a viser trajektorierne for $\omega_2 < \omega < \omega_1$, dvs. i frekvensområdet, hvor der eksisterer 2 asymptotisk stabile bevægelser og 1 instabil bevægelse. De tilhørende trajektorier bliver herved henholdsvis asymptotisk orbital stabil og orbital instabil. Disse er optegnet med kraftig streg, idet den orbital instabile trajektorie er vist punkteret.

Figur 3.4b viser tilsvarende faseportrættet for $\omega > \omega_1$, hvor der kun eksisterer 1 asymptotisk stabil periodisk bevægelse.

Tilfældene $\omega = \omega_1$ og $\omega = \omega_2$ kan opnås som grænsetilfælde af det på figur 3.4a viste tilfælde. For $\omega \uparrow \omega_1$ konvergerer ellipsen for den instabile bevægelse mod ellipsen for den inderste asymptotisk stabile bevægelse. I grænsen vil den resulterende periodiske bevægelse være asymptotisk stabil for perturberede bevægelser, der startes indenfor trajektorien for denne, og instabil for enhver perturberet bevægelse, der startes umiddelbart udenfor trajektorien. Efter definitionen er den periodiske bevægelse for $\omega = \omega_1$ derfor instabil.

Tilsvarende ses for $\omega \downarrow \omega_2$, at den resulterende periodiske bevægelse bliver instabil, idet den er asymptotisk stabil for alle perturberede bevægelser, der starter udenfor ellipsen, og instabil for alle perturberede bevægelser, der starter indenfor denne.



Figur 3.5: Harmonisk amplitudegensvar. Hopfænomener. a) Blød fjeder. b) Hård fjeder.

Den kendsgerning, at det harmoniske amplitudegensvar for en viskøst dæmpet Duffingoscillator har lodret tangent for de cykliske påvirkningsfrekvenser $\omega = \omega_1$ og $\omega = \omega_2$, giver anledning til karakteristiske hop, når den cykliske egenfrekvens ω

ændres langsomt, svarende til at amplituden af den periodiske bevægelse langsomt ændres.

Betragt figur 3.5a, der viser forholdene ved en blød fjeder. Sænkes den cykliske frekvens langsomt fra en værdi $\omega > \omega_0$ til $\omega = \omega_2$, bevæges systemet kontinuert gennem en serie af periodiske bevægelser, hvis amplitude er beliggende langs kurven 1-2. Ved en cyklisk frekvens lidt højere end ω_2 antages det størst mulige amplitudegensvar.

Sænkes den cykliske frekvens dernæst yderligere, således at $\omega < \omega_2$, er den pågældende bevægelse ikke mulig længere, og der sker en diskontinuert ændring af såvel amplitude som fase svarende til den lavere liggende periodiske bevægelse 3-4.

En efterfølgende langsom øgning af den cykliske frekvens til $\omega = \omega_1$, medfører en kontinuert øgning af amplituden. Øges den cykliske frekvens yderligere, sker et nyt hop tilbage til den asymptotisk stabile periodisk bevægelse på kurven 1-2.

Hoppene er forbundet med en diskontinuert ændring af såvel faser som amplituder. Fænomenet betegnes *amplitudehysteresis*. Betegnelsen er uheldig, fordi hysteresesløjferne ikke er udtryk for energidissipation. Fænomenet må derfor ikke forveksles med hysteresesløjferne ved ikke-konservative kræfter som beskrevet i kapitel 1.

3.5 Subharmonisk og kombinationsharmonisk gensvar.

Når en lineær oscillator påvirkes af en harmonisk varierende ydre kraft, bliver det stationære gensvar harmonisk varierende med samme frekvens som den ydre kraft.

For ikke-lineære systemer bliver det stationære gensvar periodisk varierende, men i almindelighed ikke rent harmonisk varierende. Ved analysen af det harmoniske amplitudegensvar af en svagt ikke-lineær Duffingoscillator fandtes, at den dominerende frekvens i gensvaret var lig med frekvensen af påvirkningen. Det viser sig nu, at under visse omstændigheder kan Duffing's oscillator have en anden periodisk løsning, i hvilken der forekommer en væsentlig harmonisk komponent med en frekvens lig $\frac{1}{3}$ af påvirkningens frekvens. Den pågældende harmoniske komponent, der betegnes *det subharmonisk gensvar*, skyldes en form for resonanspåvirkning via 3. ordens leddet.

Igen betragtes tvungne svingninger af et viskøst dæmpet Duffingsystem under påvirkning af en ydre harmonisk varierende kraft med den cykliske frekvens 3ω

$$\ddot{x} + 2\mu a \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2(1 + \mu x^2)x = p_0 \cos 3\omega t, \quad |\mu| \ll 1 \quad (3-133)$$

$$\zeta = \mu a \quad (3-134)$$

Vi antager systemet er svagt dæmpet, svarende til $\zeta \ll 1$.

I modsætning til (3-109) antages systemet ikke længere svagt ikke-autonomt ($p_0 \simeq \ddot{x} \simeq \omega_0^2 x$).

Vi søger nu periodiske løsninger til (3-133), i hvilken der indgår en væsentlig subharmonisk komponent. Den subharmoniske komponent har pr. definition den cykliske frekvens ω . Som nævnt skyldes den subharmoniske komponent en resonanspåvirkning, der induceres i systemet via leddet $\omega_0^2 \mu x^3$ i (3-133). Denne er derfor kun mulig for $\omega \simeq \omega_0$. Vi sætter derfor, sammenlign med (3-111)

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \mu \alpha_1 \quad (3-135)$$

Løsningen til (3-133) søges på formen

$$x(t) = x^{(0)}(t) + \mu x^{(1)}(t) + \mu^2 x^{(2)}(t) + \dots \quad (3-136)$$

hvor $x^{(i)}(t)$ bestemmes som periodiske funktioner med perioden $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

(3-135), (3-136) indsættes i (3-133) og led med fælles faktor μ^n samles. Herved findes

$$\begin{aligned} & \ddot{x}^{(0)} + \mu \ddot{x}^{(1)} + \mu^2 \ddot{x}^{(2)} + \dots + 2\mu a \omega_0 (\dot{x}^{(0)} + \mu \dot{x}^{(1)} + \dots) \\ & (\omega^2 - \mu \alpha_1) (x^{(0)} + \mu x^{(1)} + \mu^2 x^{(2)} + \dots) + \mu \omega_0^2 (x^{(0)} + \mu x^{(1)} + \dots)^3 = p_0 \cos 3\omega t \Rightarrow \\ & \ddot{x}^{(0)} + \omega^2 x^{(0)} - p_0 \cos 3\omega t + \mu (\ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} + \omega_0^2 (x^{(0)})^3 + 2a\omega_0 \dot{x}^{(0)} - \alpha_1 x^{(0)}) \\ & + \mu^2 (\ddot{x}^{(2)} + \omega^2 x^{(2)} + 3\omega_0^2 (x^{(0)})^2 x^{(1)} + 2a\omega_0 \dot{x}^{(1)} - \alpha_1 x^{(1)}) + \dots = 0 \quad (3-137) \end{aligned}$$

Af (3-137) udledes differentialligningssystemet

$$\ddot{x}^{(0)} + \omega^2 x^{(0)} = p_0 \cos 3\omega t \quad (3-138a)$$

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} = -\omega_0^2 (x^{(0)})^3 - 2a\omega_0 \dot{x}^{(0)} + \alpha_1 x^{(0)} \quad (3-138b)$$

$$x^{(2)} + \omega^2 x^{(2)} = -3\omega_0^2 (x^{(0)})^2 x^{(1)} - 2a\omega_0 \dot{x}^{(1)} + \alpha_1 x^{(1)} \quad (3-138c)$$

\vdots

(3-138a) har løsningen

$$x^{(0)}(t) = A \cos(\omega t + \Psi) - \frac{p_0}{8\omega^2} \cos 3\omega t \quad (3-139)$$

$x^{(0)}(t)$ er det dominerende led på højresiden af (3-136). Højresiden af (3-139) repræsenterer dermed dominerende bidrag til henholdsvis det subharmoniske og det harmoniske gensvar. Den efterfølgende analyse vil afsløre, at disse er af samme størrelsesorden, dvs. $A \simeq \frac{p_0}{8\omega^2}$. Det er dette forhold, der nødvendiggør den her benyttede formulering af perturbationsmetoden. En subharmonisk komponent er tilstede, når $A \neq 0$. For $A = 0$ bliver gensvaret rent harmonisk.

Ved indsætning af (3-139) antager (3-138b) formen

$$\begin{aligned}
\ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} &= -\omega_0^2 A^3 \cos^3(\omega t + \Psi) + 3\omega_0^2 A^2 \frac{p_0}{8\omega^2} \cos^2(\omega t + \Psi) \cos 3\omega t \\
&- 3\omega_0^2 A \left(\frac{p_0}{8\omega^2}\right)^2 \cos(\omega t + \Psi) \cos^2 3\omega t + \omega_0^2 \left(\frac{p_0}{8\omega^2}\right)^3 \cos^3 3\omega t \\
&+ 2a\omega_0 \left(\omega A \sin(\omega t + \Psi) - \frac{3p_0}{8\omega} \sin 3\omega t\right) + \alpha_1 \left(A \cos(\omega t + \Psi) - \frac{p_0}{8\omega^2} \cos 3\omega t\right) = \\
&\left(-\frac{3}{4}\omega_0^2 A^3 - \frac{3}{2}\omega_0^2 A \left(\frac{p_0}{8\omega^2}\right)^2 + \alpha_1 A\right) \cos(\omega t + \Psi) \\
&+ \frac{3}{32} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} A^2 p_0 \cos(\omega t - 2\Psi) + 2a\omega_0 \omega A \sin(\omega t + \Psi) \\
&+ \left(\frac{3}{16} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} A^2 p_0 + \frac{3}{4}\omega_0^2 \left(\frac{p_0}{8\omega^2}\right)^3 - \alpha_1 \frac{p_0}{8\omega^2}\right) \cos 3\omega t - \frac{3}{4} a \frac{\omega_0}{\omega} p_0 \sin 3\omega t \\
&- \frac{1}{4}\omega_0^2 A^3 \cos(3\omega t + 3\Psi) + \frac{3}{32} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} A^2 p_0 \cos(5\omega t + 2\Psi) \\
&- \frac{3}{4}\omega_0^2 A \left(\frac{p_0}{8\omega^2}\right)^2 (\cos(5\omega t - \Psi) + \cos(7\omega t + \Psi)) + \frac{1}{4}\omega_0^2 \left(\frac{p_0}{8\omega^2}\right)^3 \cos 9\omega t = \\
&= a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t \\
&+ a_5 \cos 5\omega t + b_5 \sin 5\omega t + a_7 \cos 7\omega t + b_7 \sin 7\omega t + a_9 \cos 9\omega t \quad (3-140)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left(-\frac{3}{4}\omega_0^2 A^3 - \frac{3}{2}\omega_0^2 A \left(\frac{p_0}{8\omega^2}\right)^2 + \alpha_1 A\right) \cos \Psi + \frac{3}{32} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} A^2 p_0 \cos 2\Psi \\
&+ 2a\omega_0 \omega A \sin \Psi \quad (3-140a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\left(-\frac{3}{4}\omega_0^2 A^3 - \frac{3}{2}\omega_0^2 A \left(\frac{p_0}{8\omega^2}\right)^2 + \alpha_1 A\right) \sin \Psi + \frac{3}{32} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} A^2 p_0 \sin 2\Psi \\
&+ 2a\omega_0 \omega A \cos \Psi \quad (3-140b)
\end{aligned}$$

De øvrige Fourierkoefficienter $a_3, b_3, a_5, b_5, a_7, b_7, a_9$ kan let udregnes. Det midterste udsagn af (3-140) følger ved anvendelsen af identiteten $\cos^2 x \cos y = \frac{1}{2} \cos y + \frac{1}{4} \cos(2x - y) + \frac{1}{4} \cos(2x + y)$.

Løsningen $x^{(1)}$ til (3-140) bliver kun periodisk, hvis de sekulære led $a_1 \cos \omega t$ og $b_1 \sin \omega t$ på højresiden forsvinder, dvs. når $a_1 = b_1 = 0$.

(3-140a) ganges med $\cos \Psi$ og (3-140b) ganges med $-\sin \Psi$, hvorefter ligningerne adderes. Idet $a_1 = b_1 = 0$ findes

$$-\frac{3}{4}\omega_0^2 A^3 - \frac{3}{2}\omega_0^2 A \left(\frac{p_0}{8\omega^2}\right)^2 + \alpha_1 A + \frac{3}{32}\frac{\omega_0^2}{\omega^2} A^2 p_0 \cos 3\Psi = 0 \quad (3-141a)$$

Dernæst ganges (3-140a) med $\sin \Psi$ og (3-140b) ganges med $\cos \Psi$, hvorefter ligningerne adderes. Herved

$$\frac{3}{32}\frac{\omega_0^2}{\omega^2} A^2 p_0 \sin 3\Psi + 2a\omega_0\omega A = 0 \quad (3-141b)$$

De ukendte størrelser A, Ψ bestemmes som løsning til (3-141). Ved (3-134), (3-135) haves herved følgende løsningsmuligheder

$$\Psi \text{ vilkårlig} \wedge A = 0 \quad (3-142)$$

$$\frac{3}{32}\frac{\omega_0^2}{\omega^2} A \mu p_0 \sin 3\Psi = -2\zeta\omega_0\omega \quad (3-143)$$

$$\frac{3}{32}\frac{\omega_0^2}{\omega^2} A \mu p_0 \cos 3\Psi = \omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3}{4}\mu\omega_0^2 A^2 + \frac{3}{2}\mu\omega_0^2 \left(\frac{p_0}{8\omega^2}\right)^2 \quad (3-144)$$

Af (3-143), (3-144) følger

$$\operatorname{tg} 3\Psi = -\frac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3}{4}\mu\omega_0^2 A^2 + \frac{3}{2}\mu\omega_0^2 \left(\frac{p_0}{8\omega^2}\right)^2} \quad (3-145)$$

$$\begin{aligned} \frac{9}{1024}\frac{\omega_0^4}{\omega^4} A^2 \mu^2 p_0^2 &= 4\zeta^2 \omega_0^2 \omega^2 \\ &+ \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3}{4}\mu\omega_0^2 A^2 + \frac{3}{2}\mu\omega_0^2 \left(\frac{p_0}{8\omega^2}\right)^2 \right)^2 \end{aligned} \quad (3-146)$$

(3-142) svarer til rent harmonisk gensvar. Mulige periodiske bevægelser af (3-133) med subharmonisk gensvar bestemmes da som løsninger $A > 0$. Man starter med at løse (3-146), hvorefter Ψ bestemmes af (3-145).

Når A og Ψ er bestemt ved (3-145), (3-146) kan Fourierkoefficienterne $a_3, b_3, a_5, b_5, a_7, b_7, a_9$ i (3-140) udregnes. Løsningen til den resulterende ligning (3-140) bliver herved

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= A_1 \cos(\omega t + \Psi_1) - \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{a_3}{8} \cos 3\omega t + \frac{b_3}{8} \sin 3\omega t \right) \\ &+ \frac{a_5}{24} \cos 5\omega t + \frac{b_5}{24} \sin 5\omega t + \frac{a_7}{48} \cos 7\omega t + \frac{b_7}{48} \sin 7\omega t + \frac{a_9}{80} \cos 9\omega t \end{aligned} \quad (3-147)$$

$A_1 \cos(\omega t + \Psi_1)$ på højresiden af (3-147) repræsenterer 1. ordens korrektionen til det subharmoniske gensvar, mens bidraget $-\frac{1}{\omega^2} \left(\frac{a_3}{8} \cos 3\omega t + \frac{b_3}{8} \sin 3\omega t \right)$ er 1. ordens korrektionen til det harmoniske gensvar.

Amplituden A_1 og fasen Ψ_1 i (3-147) er endnu ukendt. (3-139) og (3-147) indsættes på højresiden af (3-138c). A_1 og Ψ_1 bestemmes nu ved at kræve, at de sekulære led på højresiden af (3-138c) forsvinder. Herefter er 1. ordensløsningen fastlagt. I 2. ordensløsningen, bestemt af den resulterende ligning (3-138c), optræder der herefter et subharmonisk led $A_2 \cos(\omega t + \Psi_2)$. A_2 og Ψ_2 bestemmes ved at kræve, at de sekulære led på højresiden af 3. ordens differentialligningen skal forsvinde. Processen kan fortsættes ubegrænset.

Vi skal i resten af dette afsnit undersøge den opnåede 0. ordensløsning (3-139) med A og Ψ bestemt ved (3-145), (3-146).

Først betragtes tilfældet $\zeta = 0$. Af (3-143), (3-144) følger

$$\sin 3\Psi = 0 \Rightarrow$$

$$\cos 3\Psi = \pm 1 \quad (3-148)$$

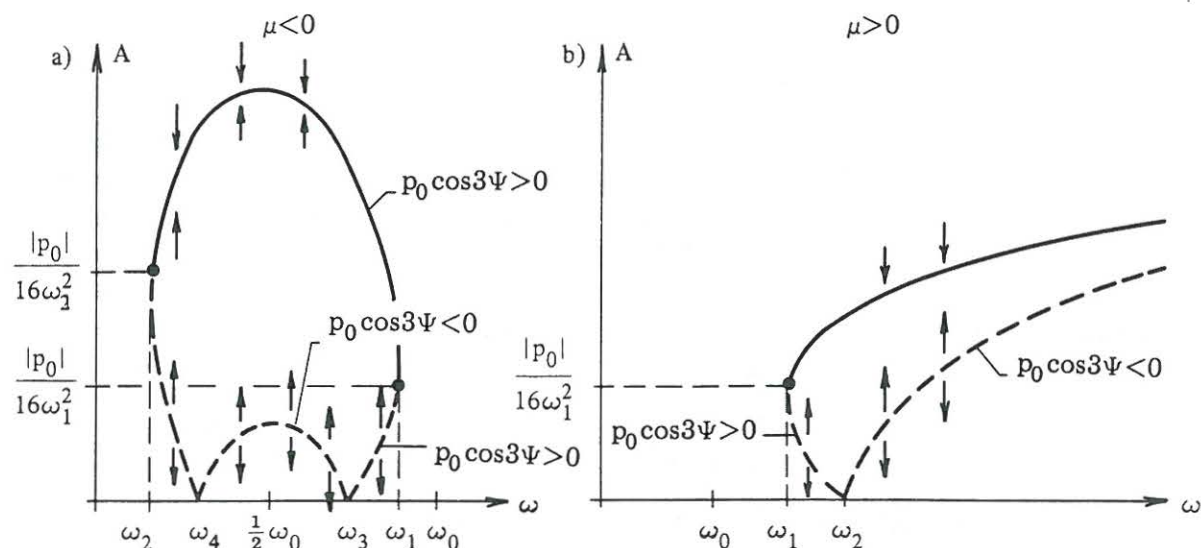
$$A^2 - \frac{1}{8\omega^2} p_0 \cos 3\Psi A + \frac{1}{32} \frac{p_0^2}{\omega^4} + \frac{4}{3} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\mu \omega_0^2} = 0 \quad (3-149)$$

2. gradligningen (3-149) har 0, 1 eller 2 positive reelle løsninger, hvortil svarer et lignende antal periodiske bevægelser med subharmoniske komponenter. Ved anvendelse af (3-148) bliver løsningen til (3-149)

$$A = \frac{p_0 \cos 3\Psi}{16\omega^2} \left(1 \pm \sqrt{-7 + \frac{1024}{3} \frac{(\omega^2 - \omega_0^2) \omega^4}{\mu p_0^2 \omega_0^2}} \right) \quad (3-150)$$

Reelle løsninger for A eksisterer dermed kun, når

$$-7 + \frac{1024}{3} \frac{(\omega^2 - \omega_0^2) \omega^4}{\mu p_0^2 \omega_0^2} \geq 0 \quad (3-151)$$



Figur 3.6: Subharmonisk amplitudegensvar. a) Blød fjeder. b) Hård fjeder.

Betingelsen (3-151) undersøges i det følgende henholdsvis for $\mu < 0$ og $\mu > 0$. For $\mu < 0$ ses umiddelbart, at (3-151) ikke er opfyldt for $\omega = 0$ og $\omega \geq \omega_0$. Vi søger da 2 rødder ω_1 og ω_2 til ligningen, der fremkommer, når (3-151) gælder med et lighedstegn, således $0 < \omega_2 < \omega_1 < \omega_0$, og således at (3-151) opfyldes for

$$\omega_2 \leq \omega \leq \omega_1, \quad \mu < 0 \quad (3-152)$$

For $\mu < 0$ kan (3-151) skrives

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^3 - x^2 + \lambda \leq 0 \\ x &= \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \quad \lambda = \frac{21}{1024} \frac{|\mu| p_0^2}{\omega_0^4} \end{aligned} \right\} \quad (3-153)$$

Lokale ekstremer af (3-153) er givet ved

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ \frac{2}{3} \end{cases} \quad (3-154)$$

Kun det lokale ekstremum i $x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2}{3}}\omega_0$ er interessant. Her gælder

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}\right) &= -\frac{4}{27} + \lambda \leq 0 \Rightarrow \\ |p_0| &\leq \sqrt{\frac{4096}{567} \frac{\omega_0^4}{|\mu|}} \end{aligned} \quad (3-155)$$

Kun for påvirkningsamplituder p_0 , der opfylder (3-155), er (3-151) opfyldt for $\mu < 0 \wedge \omega \in [\omega_1, \omega_2]$, hvor $0 < \omega_1 < \sqrt{\frac{2}{3}}\omega_0 < \omega_2 < \omega_0$. For $\omega \in]\omega_1, \omega_2[$ eksisterer der da 2 reelle løsninger til (3-150). Den største af disse er stabil, mens den laveste er instabil, hvilket kan vises ved infinitesimal analyse. Fasen Ψ skal vælges, så løsningerne (3-150) bliver positive.

Leddene under kvadratroden i (3-150) er lig 0 for $\omega = \omega_1$ eller $\omega = \omega_2$. *Det subharmoniske amplitudegensvar*, dvs. grafen for A som funktion af ω , har lodret tangent i disse punkter.

Den øverste stabile løsning starter i $(\omega_2, \frac{|p_0|}{16\omega_2^2})$, antager et maximum i det indre af intervallet (ω_1, ω_2) og ender i $(\omega_1, \frac{|p_0|}{16\omega_1^2})$. Denne er tegnet med fuld streg på figur 3.6a. For denne løsning skal Ψ vælges, så $p_0 \cos 3\Psi > 0$.

Den nederste instabile løsning starter ligeledes i $(\omega_2, \frac{|p_0|}{16\omega_2^2})$ og ender i $(\omega_1, \frac{|p_0|}{16\omega_1^2})$. Denne er tegnet stiplet på figur 3.6a. Kurven skærer absцisseaksen i punkterne ω_3 og ω_4 , bestemt ved

$$1 - \sqrt{-7 - \frac{1024(\omega^2 - \omega_0^2)\omega^4}{3|\mu|p_0^2\omega_0^2}} = 0 \quad (3-156)$$

For $\omega \in]\omega_2, \omega_4[$ og $\omega \in]\omega_3, \omega_4[$ skal fassen Ψ vælges, så $p_0 \cos 3\Psi > 0$. For $\omega \in]\omega_3, \omega_4[$ sker et fortegnsskifte i løsningen, hvorfor fassen Ψ her vælges, så $p_0 \cos 3\Psi < 0$. Ved passagen af $\omega = \omega_3$ og $\omega = \omega_4$ sker således et fasespring på $\Delta\Psi = \frac{\pi}{3}$ i den nederste instabile subharmoniske komponent.

For $\mu > 0$ ses umiddelbart, at (3-151) ikke er opfyldt for $\omega \in [0, \omega_0]$. Endvidere eksisterer en og kun en værdi $\omega_1 > \omega_0$, således (3-151) gælder med et lighedstegn for $\omega = \omega_1$, og (3-151) gælder skarpt for $\omega > \omega_1$. For $\omega \in]\omega_1, \infty[$ har (3-150) derfor 2 reelle løsninger. Igen er den største af disse stabil, mens den laveste er instabil.

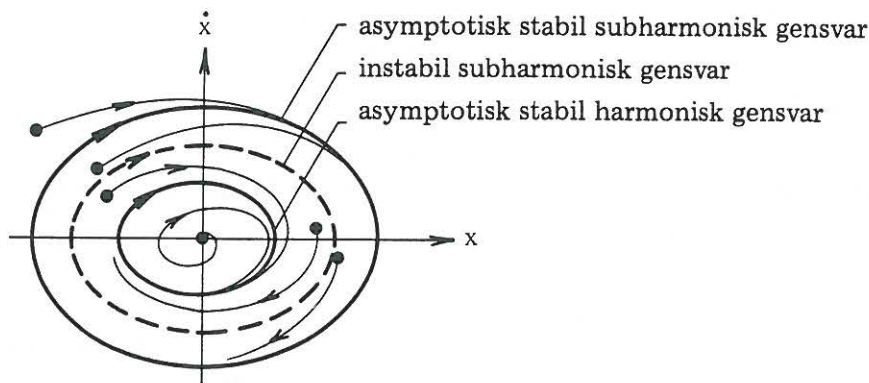
Den øverste stabile løsning starter i $(\omega_1, \frac{|p_0|}{16\omega_1^2})$, og er tegnet med fuld streg på figur 3.66. Det fremgår af (3-150), at $A \rightarrow \infty$ for $\omega \rightarrow \infty$. For denne løsning skal Ψ vælges, så $p_0 \cos 3\Psi > 0$.

Den nederste instabile løsning starter ligeledes i $(\omega_1, \frac{|p_0|}{16\omega_1^2})$, og er tegnet stiplet på figur 3.66. Kurven skærer absцisseaksen i punktet ω_2 , bestemt ved

$$1 - \sqrt{-7 + \frac{1024(\omega^2 - \omega_0^2)\omega^4}{3\mu p_0^2\omega_0^2}} = 0 \quad (3-157)$$

For $\omega \in]\omega_1, \omega_2[$ skal fassen Ψ vælges, så $p_0 \cos 3\Psi > 0$. For $\omega \in]\omega_2, \infty[$ sker et fortegnsskifte i løsningen, hvorfor Ψ her vælges, så $p_0 \cos 3\Psi < 0$. Ved passagen af $\omega = \omega_2$ sker således et fasespring på $\Delta\Psi = \frac{\pi}{3}$ i den nederste instabile subharmoniske komponent.

Det fremgår af (3-150), at den nederste instabile og den øverste stabile løsning nærmer sig asymptotisk hverandre for $\omega \rightarrow \infty$.



Figur 3.7: Faseportræt for svagt dæmpet Duffingoscillator med subharmoniske gensvarskomponenter.

Når der inkluderes et svagt dæmpningsled i analysen, ændres forløbet af det subharmoniske amplitudegensvar ikke kvalitativt i forhold til det på figur 3.6 viste, idet dog A og de karakteristiske cykliske frekvenser $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ for $\mu < 0$ og ω_1, ω_2 for $\mu > 0$ nu bestemmes ved analyse af (3-146). Faseændringerne sker derimod kontinuert, således Ψ ikke længere er stykkevis konstant.

I det dæmpede tilfælde er den nederste subharmoniske bevægelse stadig instabil, hvorimod den øverste subharmoniske og den rent harmoniske bevægelse ($A = 0$) nu er asymptotisk stabile. Trajektorien for (3-139) bliver en lukket kurve, der kun for $A = 0$ er en ellipse. Disse er vist på figur 3.7 for de 2 mulige subharmoniske bevægelser og den harmoniske bevægelse. Alle bevægelser, hvis begyndelsesbetingelser i faseplanen er beliggende udenfor trajektorien for den instabile subharmoniske bevægelse vil bevæge sig mod den stabile subharmoniske bevægelse. Alle bevægelser, der starter indenfor den instabile subharmoniske bevægelse vil bevæge sig mod den harmoniske bevægelse. Bevægelserne bort fra den instabile subharmoniske bevægelse er symbolsk markeret med pile på figur 3.6a og figur 3.6b.

Analysen har vist, at et stabilt subharmonisk gensvar kun er muligt ved bestemte cykliske frekvenser 3ω af den ydre belastning, og kun når systemet bringes så store initiale perturbationer i form af begyndelsesbetingelserne, at systemet starter udenfor trajektorien for den instabile subharmoniske bevægelse. Ved påvirkningsfrekvenser svarende til $\omega = \omega_3$ og $\omega = \omega_4$ for den bløde fjeder og ved frekvensen $\omega = \omega_2$ for den hårde fjeder kan stabile subharmoniske bevægelser dog etableres ved ganske små perturbationer af den harmoniske bevægelse.

Af den gennemførte analyse fremgår, at Duffings oscillator både med og uden dæmpningsled besidder en subharmonisk komponent med en frekvens lig $1/3$ af påvirkningsfrekvensen. Den subharmoniske komponent siges i dette tilfælde at være af 3. orden. Ordenen af den subharmoniske komponent bliver mere generelt

af m. orden, hvis ikke-lineariteten har formen $\mu\omega_0^2 x^m$.

Når et lineært system påvirkes af 2 harmonisk varierende kraftkomponenter med cykliske frekvenser ω_1 og ω_2 , bliver det stationære gensvar en linearkombination af harmoniske komponenter med frekvenser ω_1 og ω_2 . I modsætning hertil vil gensvaret i et ikke-lineært system påvirket af de samme 2 harmonisk varierende kraftkomponenter for det første bestå af harmoniske komponenter med frekvenserne ω_1 og ω_2 som i det lineære tilfælde, herudover af harmoniske komponenter med cykliske frekvenser, der er et multiplum af ω_1 eller ω_2 , og endelig af harmoniske komponenter med cykliske frekvenser af typen $n\omega_1 + m\omega_2$, hvor n og m er heltal. De sidstnævnte harmoniske komponenter repræsenterer *det kombinationsharmoniske gensvar af orden n og m* . Ordenen af de kombinationsharmoniske komponenter tilstede i responset afhænger af naturen af det ikke-lineære led.

Vi betragter igen tvungne svingninger af et viskøst dæmpet Duffingsystem

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2(1 + \mu x^2)x &= p_1 \cos \omega_1 t + p_2 \cos \omega_2 t \\ |\mu| &\ll 1, \quad \omega_1 \neq \omega_2 \end{aligned} \right\} \quad (3-158)$$

Efter transiente komponenter fra begyndelsesbetingelserne er klinget bort, søges det stationære flytningsrespons på formen

$$x(t) = x^{(0)}(t) + \mu x^{(1)}(t) + \mu^2 x^{(2)}(t) + \dots \quad (3-159)$$

Ved indsætning af (3-159) i (3-158) fremkommer følgende system af differential-ligninger til bestemmelse af $x^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, \dots$

$$\ddot{x}^{(0)} + 2\zeta\omega_0\dot{x}^{(0)} + \omega_0^2 x^{(0)} = p_1 \cos \omega_1 t + p_2 \cos \omega_2 t \quad (3-160a)$$

$$\ddot{x}^{(1)} + 2\zeta\omega_0\dot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = -\omega_0^2 (x^{(0)})^3 \quad (3-160b)$$

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\zeta\omega_0\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -3\omega_0^2 (x^{(0)})^2 x^{(1)} \quad (3-160c)$$

\vdots

Vi søger den stationære periodiske bevægelse, og kan derfor ignorere løsningerne til de homogene differentiaalligninger, svarende til at gensvaret fra begyndelsesbetingelserne ingen indflydelse har.

(3-160a) har løsningen

$$x^{(0)}(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \Psi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \Psi_2) \quad (3-161)$$

hvor, jvf. (3-131), (3-132)

$$\left. \begin{aligned} tg\Psi_i &= -\frac{2\zeta\omega_i\omega_0}{\omega_0^2 - \omega_i^2} \\ A_i &= \frac{|p_i|}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_i^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega_i^2}} \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, 2 \quad (3-162)$$

Ved indsætning af (3-161) på højresiden af (3-160b) findes ved fornyet anvendelse af identiteten $\cos^2 x \cos y = \frac{1}{2} \cos y + \frac{1}{4} \cos(2x - y) + \frac{1}{4} \cos(2x + y)$

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(1)} + 2\zeta\omega_0\dot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = & B_1 \cos(\omega_1 t + \Psi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \Psi_2) \\ & + B_3 [\cos((2\omega_1 + \omega_2)t + 2\Psi_1 + \Psi_2) + \cos((2\omega_1 - \omega_2)t + 2\Psi_1 - \Psi_2)] \\ & + B_4 [\cos((\omega_1 + 2\omega_2)t + \Psi_1 + 2\Psi_2) + \cos((\omega_1 - 2\omega_2)t + \Psi_1 - 2\Psi_2)] \\ & + B_5 \cos(3\omega_1 t + 3\Psi_1) + B_6 \cos(3\omega_2 t + 3\Psi_2) \end{aligned} \quad (3-163)$$

hvor

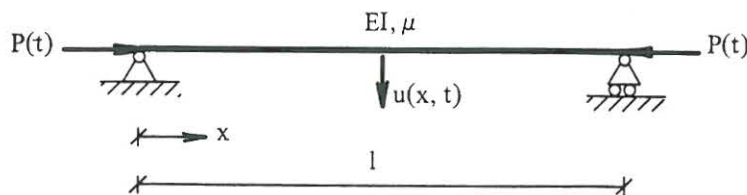
$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -\omega_0^2 \left(\frac{3}{4} A_1^3 + \frac{3}{2} A_1 A_2^2 \right) & B_2 &= -\omega_0^2 \left(\frac{3}{4} A_2^3 + \frac{3}{2} A_1^2 A_2 \right) \\ B_3 &= -\omega_0^2 \frac{3}{4} A_1^2 A_2 & B_4 &= -\omega_0^2 \frac{3}{4} A_1 A_2^2 \\ B_5 &= -\omega_0^2 \frac{1}{4} A_1^3 & B_6 &= -\omega_0^2 \frac{1}{4} A_2^3 \end{aligned} \right\} \quad (3-164)$$

Det følger af (3-163), at den stationære del af 1. ordens løsningen har harmoniske komponenter med de cykliske frekvenser $\omega_1, \omega_2, 2\omega_1 \pm \omega_2, \omega_1 \pm 2\omega_2, 3\omega_1$ og $3\omega_2$. I modsætning til gensvaret af det tilsvarende lineære system, indeholder det stationære gensvar til systemet (3-158) således, udover de harmoniske komponenter med de cykliske frekvenser ω_1 og ω_2 , såvel højere harmoniske komponenter med de cykliske frekvenser $3\omega_1$ og $3\omega_2$, som kombinationsharmoniske komponenter med de cykliske frekvenser $2\omega_1 \pm \omega_2$ og $\omega_1 \pm 2\omega_2$. Som følge af, at højere harmoniske og kombinationsharmoniske komponenter kun optræder i 1. ordens løsningen $x^{(1)}(t)$ og ikke i 0. ordens løsningen $x^{(0)}(t)$, er disse led normalt betydningsløse sammenlignet med de harmoniske komponenter med de cykliske frekvenser ω_1 og ω_2 . Hvis imidlertid en af de cykliske frekvenser $2\omega_1 \pm \omega_2, \omega_1 \pm 2\omega_2, 3\omega_1, 3\omega_2$ kommer i nærheden af den udæmpede cykliske egenfrekvens ω_0 kan større amplituder forventes. Dette var som vist årsagen til det subharmoniske gensvar af 3. orden.

De cykliske frekvenser $2\omega_1 \pm \omega_2, \omega_1 \pm 2\omega_2, 3\omega_1, 3\omega_2$ er specifikke for systemet (3-158), pga. den kubiske ikke-linearitet. For systemer med andre typer af ikke-lineariteter fremkommer andre højere ordens frekvenser og andre typer af kombinationsfrekvenser.

3.6 Systemer med tidsvarierende koefficienter. Mathieu's ligning.

Eksempel 3-4: Søjle med tidsvarierende tryknormalkraft.



Figur 3-8: Simpelt understøttet bjælke med konstant tværsnit belastet med tidsvarierende tryknormalkraft.

En simpelt understøttet Bernoulli-Eulerbjælke af længden l med konstant tværsnit er belastet med en tidsvarierende tryknormalkraft $P(t)$. Bøjningsstivheden er EI , hvor E er elasticitetsmodul og I er bøjningsinertimomentet. Massen pr. længdeenhed benævnes μ . Koordinataksens begyndelsespunkt $x = 0$ vælges i venstre endepunkt. Højre endepunkt får herved koordinaten $x = l$.

Den partielle differentialligning for flytningen $u(x, t)$ ud fra ligevægtstilstanden og de tilhørende randbetingelser er givet ved

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + P(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3-165)$$

$$u(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u(0, t) = u(l, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u(l, t) = 0 \quad (3-166)$$

Løsningen til (3-165), (3-166) søges på formen

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \Phi^{(n)}(x) \quad (3-167)$$

$\Phi^{(n)}(x)$ er egensvingningsformerne for det til (3-165), (3-166) svarende egensvingningsproblem for $P(t) \equiv P_0 = \text{konstant}$. Disse er givet ved

$$\Phi^{(n)}(x) = \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3-168)$$

(3-168) opfylder ortogonalitetsbetingelsen

$$\int_0^l \mu \Phi^{(m)}(x) \Phi^{(n)}(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{1}{2} \mu l, & m = n \end{cases} \quad (3-169)$$

(3-167), (3-168) ses at opfylde randbetingelserne (3-166). Ved indsætning af (3-167), (3-168) i den partielle differentialligning (3-165) findes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\mu \ddot{q}_n + \left(EI \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 - P(t) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) q_n \right] \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) = 0 \quad (3-170)$$

(3-170) ganges med $\sin(m\pi \frac{x}{l})$, hvorefter ligningerne integreres fra 0 til l . Ved udnyttelse af ortogonalitetsbetingelsen (3-169) ses, at modalkoordinaterne q_n alle skal tilfredsstille følgende system af differentialligninger

$$\ddot{q}_n + \omega_{n,0}^2 \left(1 - \frac{1}{n^2} \frac{P(t)}{P_E}\right) q_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3-171)$$

$$\omega_{n,0}^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \frac{EI}{\mu} \quad (3-172)$$

$$P_E = \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad (3-173)$$

$\omega_{n,0}$ er den cykliske udæmpede egenfrekvens af n . orden af systemet for normalkraften $P \equiv 0$. P_E er søjlens knæklast efter Euler's formel.

Betragt nu specialtilfældet

$$P(t) = P_0 + P_1 \cos \omega t \quad (3-174)$$

Der indføres følgende dimensionsløse parametre

$$\tau = \frac{1}{2} \omega t \quad (3-175)$$

$$\delta = 4 \frac{\omega_n^2}{\omega^2}, \quad \omega_n^2 = \omega_{n,0}^2 \left(1 - \frac{1}{n^2} \frac{P_0}{P_E}\right) \quad (3-176)$$

$$2\varepsilon = -4 \frac{\omega_{n,0}^2}{\omega^2} \frac{1}{n^2} \frac{P_1}{P_E} \quad (3-177)$$

ω_n i (3-176) er den cykliske egenfrekvens af n . orden af systemet for tryknormalkraften P_0 .

Herved reduceres (3-171) til

$$\frac{d^2}{d\tau^2} q_n + (\delta + 2\varepsilon \cos 2\tau) q_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3-178)$$

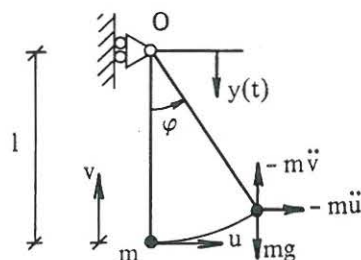
(3-178) genkendes som Mathieu's differentialligning (2-8).

Den retlinede ligevægtstilstand $u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \equiv 0$ svarer til følgende ligevægtspunkt for modalkoordinatligningerne (3-178)

$$q_n(\tau) = 0, \quad \frac{d}{d\tau} q_n(\tau) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3-179)$$

Søjlen er instabil, hvis mindst et af ligevægtspunkterne (3-179) er instabilt. Omvendt er søjlen asymptotisk stabil, hvis samtlige ligevægtspunkter (3-179) er asymptotisk stabile. Er et uendeligt antal af ligevægtspunkterne (3-179) stabile, og de øvrige ligevægtspunkter asymptotisk stabile, kan søjlen alligevel godt være dynamisk instabil. Er nemlig et uendeligt antal af modalkoordinaterne q_n begrænset, kan højresiden af (3-167) vokse udover alle grænser.

Eksempel 3-5: Matematisk pendul med tidsvarierende lodret flytning af understøtningspunktet.



Figur 3-9: Matematisk pendul med tidsvarierende lodret flytning af understøtningspunktet.

Et matematisk pendul af længden l og massen m sættes i tvungne svingninger ved at understøtningspunktet O undergår en tidsvarierende flytning $y(t)$ i lodret retning. y regnes positiv nedad.

Massens bevægelser i vandret og lodret retning fra den nedre ligevægtstilstand betegnes u og v . Pendulets drejningsvinkel betegnes φ , der regnes positiv mod uret. Herved haves følgende geometriske bånd

$$\left. \begin{aligned} u &= l \sin \varphi \\ v &= l(1 - \cos \varphi) - y(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= l \cos \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{v} &= l \sin \varphi \dot{\varphi} - \dot{y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u} &= -l \sin \varphi (\dot{\varphi})^2 + l \cos \varphi \ddot{\varphi} \\ \ddot{v} &= l \cos \varphi (\dot{\varphi})^2 + l \sin \varphi \ddot{\varphi} - \ddot{y} \end{aligned} \right\} \quad (3-180)$$

Inertialkræfterne $-m\ddot{u}$ og $-m\ddot{v}$ påføres som ydre kræfter i retning af u og v . Ved benyttelse af d'Alembert's princip kan bevægelsesligningen herefter opstilles ved at udtrykke momentligevægten om punkt O . Ved (3-180) findes

$$\begin{aligned} 0 &= m(g + \ddot{v})l \sin \varphi + m\ddot{u}l \cos \varphi \Rightarrow \\ l\ddot{\varphi} + (g - \ddot{y}(t)) \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (3-181)$$

(3-181) har ligevægtspunkterne $\varphi_0 = 0$ og $\varphi_0 = \pi$. Betragt nu bevægelsen i omegnen af ligevægtspunktet $\varphi \equiv \varphi_0$, hvor $\varphi_0 = 0$ eller $\varphi_0 = \pi$. Den perturberede bevægelse $\varphi(t)$ er givet ved

$$\varphi(t) = \varphi_0 + x(t) \quad (3-182)$$

Differentialligningen for infinitesimale perturbationer $x(t)$ ud fra ligevægtspunktet følger da ved indsætning af (3-182) i (3-181), efterfulgt af en linearisering

$$\begin{aligned} l\ddot{x} + (g - \ddot{y}(t))(\sin\varphi_0\cos x + \cos\varphi_0\sin x) &= 0 \Rightarrow \\ l\ddot{x} + (g - \ddot{y}(t))\cos\varphi_0 \cdot x &\simeq 0 \end{aligned} \quad (3-183)$$

Der er her benyttet, at $\sin\varphi_0 = 0$ for begge ligevægtspunkter, og $\sin x \simeq x$.

Betragt dernæst specialtilfældet, hvor understøtningspunktet O undergår en harmonisk varierende lodret flytning, dvs.

$$y(t) = y_0 \cos \omega t \quad (3-184)$$

Der indføres følgende dimensionsløse parametre

$$\tau = \frac{1}{2}\omega t \quad (3-185)$$

$$\delta = \frac{4}{\omega^2} \frac{g \cos \varphi_0}{l} = 4 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cos \varphi_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (3-186)$$

$$2\varepsilon = \frac{4}{\omega^2} \frac{\omega^2 y_0}{l} \cos \varphi_0 = 4 \frac{y_0}{l} \cos \varphi_0 \quad (3-187)$$

Herved reduceres (3-183) til

$$\frac{d^2}{d\tau^2} x + (\delta + 2\varepsilon \cos 2\tau)x = 0 \quad (3-188)$$

Vi føres således atter til Mathieu's ligning (2-8).

Ligevægtspunktet $\varphi = \varphi_0$ er dermed stabilt, hvis ligevægtspunktet $x(\tau) = \frac{d}{d\tau} x(\tau) \equiv 0$ af Mathieu's differentialligning (3-188) er stabilt.

(3-171) og (3-181) er eksempler på lineære differentialligningerne af 2. orden med *tidsvarierende koefficienter*. Vi har tidligere set, at sådanne differentialligninger forekommer ved infinitesimal stabilitetsanalyse af periodiske bevægelser, hvor de tidsvarierende koefficienter bliver periodiske funktioner af tiden, jvf. (2-28). I alle de fremhævede eksempler opstår differentialligningen med tidsvarierende koefficienter således som en infinitesimal variationsligning ud fra en uperturberet bevægelse, givet ved enten et ligevægtspunkt eller en periodisk bevægelse.

Mathieu's differentialligning opstår ved stabilitetsanalysen af ligevægtspunkter, når systemet påvirkes af harmonisk varierende ydre påvirkninger. Endvidere fremkommer Mathieu's differentialligning som variationsligningen ved stabilitetsanalysen af harmonisk gensvar af Duffings oscillator, som det vistes i eksempel 2-8.

I resten af dette afsnit vil vi undersøge stabiliteten af ligevægtspunktet $x = \dot{x} \equiv 0$ til Mathieu's differentialligning

$$\ddot{x} + (\delta + 2\varepsilon \cos 2t)x = 0 \quad (3-189)$$

Analysen vil blive foretaget under forudsætningen, at (3-189) er kvasi-harmonisk, dvs. $|\varepsilon| \ll |\delta|$. Dette er tilfældet i eksempel 2-8, når $|H| \ll 1$, i eksempel 3-4, når $P_0 \simeq P_1$ og $P_0 \ll n^2 P_E$ og i eksempel 3-5, når $|y_0| \ll l$.

Løsningen til (3-189) er givet ved Floquet's sætning (2-90)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = c_1 \operatorname{Re} \left(e^{\lambda_1 t} \Phi^{(1)}(t) \right) + c_2 \operatorname{Re} \left(e^{\lambda_2 t} \Phi^{(2)}(t) \right) \quad (3-190)$$

hvor $\Phi^{(i)}(t)$ er periodiske vektorfunktioner.

De karakteristiske eksponenter er uafhængig af den valgte basis, dvs. af begyndelsesbetingelserne, og afhænger derfor kun af δ og ε , dvs.

$$\lambda_i = \lambda_i(\delta, \varepsilon) \quad (3-191)$$

(3-190) er asymptotisk stabil, hvis $\operatorname{Re}(\lambda_1(\delta, \varepsilon)) < 0 \wedge \operatorname{Re}(\lambda_2(\delta, \varepsilon)) < 0$. Dette vil være opfyldt for et vist område i (δ, ε) -planen. Tilsvarende er (3-190) instabil, hvis $\operatorname{Re}(\lambda_1(\delta, \varepsilon)) > 0 \vee \operatorname{Re}(\lambda_2(\delta, \varepsilon)) > 0$, hvilket vil gælde i et disjunkt område i (δ, ε) -planen. Grænsekurverne mellem stabile og instabile områder opfylder åbenbart

$$\begin{aligned} & \left(\operatorname{Re}(\lambda_1(\delta, \varepsilon)) = 0 \wedge \operatorname{Re}(\lambda_2(\delta, \varepsilon)) < 0 \right) \vee \\ & \left(\operatorname{Re}(\lambda_1(\delta, \varepsilon)) < 0 \wedge \operatorname{Re}(\lambda_2(\delta, \varepsilon)) = 0 \right) \end{aligned} \quad (3-192)$$

Når (3-192) er opfyldt, vil den ene basisløsning i (3-190) asymptotisk gå mod 0, mens den anden basisløsning bliver en periodisk funktion.

Heraf følger, at grænsekurverne mellem stabile og instabile områder i (δ, ε) -planen er karakteriseret ved, at der her eksisterer periodiske løsninger til Mathieu's differentialligning (3-189).

Idet (3-189) antages kvasiharmonisk, kan periodiske løsninger til systemet bestemmes ved Lindstedt's metode, beskrevet i afsnit 3.2.

I overensstemmelse med (3-20) og (3-21) bestemmes den periodiske løsning $x(t)$ og dennes ukendte periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ved perturbationsrækkerne

$$x(t) = x^{(0)}(t) + \varepsilon x^{(1)}(t) + \varepsilon^2 x^{(2)}(t) + \dots \quad (3-193)$$

$$\omega^2 = \delta + \varepsilon \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + \dots \quad (3-194)$$

i. ordensløsningen skal bestemmes, så $x^{(i)}(t) = x^{(i)}\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)$. Dette bestemmer de ukendte parametre $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ i (3-194), tillige med de cykliske frekvenser for hvilke

den periodiske bevægelse er mulig. Når ω^2 og $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ er bestemt, fastlægger (3-194) netop de søgte grænsekurver mellem stabile og instabile områder i $(\delta - \varepsilon)$ -planen.

I det foreliggende tilfælde er $f(x, \dot{x}, t) = 2\varepsilon \cos 2t \cdot x$. Differentialligningssystemet til bestemmelse af $x^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ følger da direkte af (3-24)

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(0)} + \omega^2 x^{(0)} &= 0 \\ x^{(0)}(0) = x_0, \dot{x}^{(0)}(0) &= \dot{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-195a)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} &= -2\cos 2t x^{(0)} + \alpha_1 x^{(0)} \\ x^{(1)}(0) = \dot{x}^{(1)}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-195b)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(2)} + \omega^2 x^{(2)} &= -2\cos 2t x^{(1)} + \alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(0)} \\ x^{(2)}(0) = \dot{x}^{(2)}(0) &= 0 \\ \vdots \end{aligned} \right\} \quad (3-195c)$$

Hovedforgreningen i den følgende analyse går på om $\omega \in \{0, 1, 2, \dots\}$ eller $\omega \notin \{0, 1, 2, \dots\}$. Først betragtes

1. $\omega \in \{0, 1, 2, \dots\}$:

1.1 $\omega = 0$:

Løsningen til (3-195a) bliver herved

$$x^{(0)}(t) = x_0 + \dot{x}_0 \cdot t \quad (3-196)$$

$x^{(0)}(t)$ bliver kun periodisk, hvis

$$\dot{x}_0 = 0 \quad (3-197)$$

Ved indsætning af $x^{(0)}(t) \equiv x_0$ på højresiden af (3-195b), antager denne differentialligning formen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(1)}(t) &= (\alpha_1 - 2\cos 2t)x_0 \\ x^{(1)}(0) = \dot{x}^{(1)}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$x^{(1)}(t) = \frac{1}{2}\alpha_1 x_0 t^2 + \frac{1}{2}x_0(\cos 2t - 1) \quad (3-198)$$

$x^{(1)}(t)$ bliver kun periodisk, hvis

$$\alpha_1 = 0 \quad (3-199)$$

Ved indsætning af de opnåede periodiske løsninger $x^{(0)}(t)$ og $x^{(1)}(t)$ på højresiden af (3-195c), antager denne differentialligning formen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(2)}(t) &= -2\cos 2t \cdot \frac{1}{2}x_0(\cos 2t - 1) + \alpha_2 x_0 = \\ \left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\right)x_0 + x_0 \cos 2t - \frac{1}{2}x_0 \cos 4t \\ x^{(2)}(0) &= \dot{x}^{(2)}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$x^{(2)}(t) = \frac{1}{2}\left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\right)x_0 t^2 - \frac{1}{4}x_0(\cos 2t - 1) + \frac{1}{32}x_0(\cos 4t - 1) \quad (3-200)$$

$x^{(2)}(t)$ bliver kun periodisk, hvis

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \quad (3-201)$$

Ved indsætning af (3-199), (3-201) og $\omega = 0$ antager (3-194) formen

$$\delta = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \quad (3-202)$$

Nu antages $\omega = 1, 2, 3, \dots$

Løsningen til (3-195a) bliver

$$x^{(0)}(t) = A \cos(\omega t + \Psi) \quad (3-203)$$

hvor A og Ψ er integrationskonstanter, der kan udtrykkes ved (x_0, \dot{x}_0) , jvf. (3-67). (3-203) indsættes på højresiden af (3-195b). Denne differentialligning antager her-ved formen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} &= \\ \alpha_1 A \cos(\omega t + \Psi) - A \cos((2 - \omega)t - \Psi) - A \cos((2 + \omega)t + \Psi) \\ x^{(1)}(0) &= \dot{x}^{(1)}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-204)$$

1.1 $\omega = 1$.

Det sekulære led på højresiden af (3-204) forsvinder, når

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cos(t + \Psi) - \cos(t - \Psi) &= \\ (\alpha_1 - 1)\cos\Psi \cos t - (\alpha_1 + 1)\sin\Psi \sin t &\equiv 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$1.1.1: \alpha_1 = 1 \quad \wedge \quad \sin \Psi = 0 \quad (3-205)$$

$$1.1.2: \alpha_1 = -1 \quad \wedge \quad \cos \Psi = 0 \quad (3-206)$$

$$1.1.1 \quad \omega = 1 \quad \wedge \quad \alpha_1 = 1 \quad \wedge \quad \sin \Psi = 0:$$

I dette tilfælde er $\cos \Psi = \pm 1$.

(3-203) antager formen

$$x^{(0)}(t) = A \cos \Psi \cos t \quad (3-207)$$

(3-204) antager formen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(1)} + x^{(1)} &= -A \cos \Psi \cos 3t \\ x^{(1)}(0) &= \dot{x}^{(1)}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$x^{(1)}(t) = \frac{A}{8} \cos \Psi (\cos 3t - \cos t) \quad (3-208)$$

$\omega = 1$, $\alpha_1 = 1$, (3-207), (3-208) indsættes i (3-195c), der antager formen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(2)} + x^{(2)} &= A \cos \Psi \left(\frac{1}{8} (1 - 2 \cos 2t) (\cos 3t - \cos t) + \alpha_2 \cos t \right) = \\ A \cos \Psi \left(\left(\alpha_2 - \frac{1}{8} \right) \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t - \frac{1}{8} \cos 5t \right) \\ x^{(2)}(0) &= \dot{x}^{(2)}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-209)$$

Det sekulære led på højresiden af (3-209) forsvinder, hvis

$$\alpha_2 = \frac{1}{8} \quad (3-210)$$

(3-205), (3-210) og $\omega = 1$ indsættes i (3-194), der antager formen

$$\delta = 1 - \varepsilon - \frac{1}{8} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \quad (3-211)$$

$$1.1.2 \quad \omega = 1 \quad \wedge \quad \alpha_1 = -1 \quad \wedge \quad \cos \Psi = 0:$$

I dette tilfælde er $\sin \Psi = \pm 1$.

(3-203) antager formen

$$x^{(0)}(t) = -A \sin \Psi \sin t \quad (3-212)$$

(3-204) antager formen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(1)} + x^{(1)} &= A \sin \Psi \sin 3t \\ x^{(1)}(0) = \dot{x}^{(1)}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$x^{(1)}(t) = -\frac{A}{8} \sin \Psi (\sin 3t - 3 \sin t) \quad (3-213)$$

$\omega = 1$, $\alpha_1 = -1$, (3-212), (3-213) indsættes i (3-195c), der antager formen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(2)} + x^{(2)} &= A \sin \Psi \left(-\frac{1}{8}(-1 - 2 \cos 2t)(\sin 3t - 3 \sin t) - \alpha_2 \sin t \right) = \\ A \sin \Psi \left(\left(-\alpha_2 + \frac{1}{8} \right) \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t + \frac{1}{8} \sin 5t \right) \\ x^{(2)}(0) = \dot{x}^{(2)}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-214)$$

Det sekulære led på højresiden af (3-214) forsvinder, hvis

$$\alpha_2 = \frac{1}{8} \quad (3-215)$$

(3-206), (3-215) og $\omega = 1$ indsættes i (3-194), der antager formen

$$\delta = 1 + \varepsilon - \frac{1}{8} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \quad (3-216)$$

1.2 $\omega = 2$

Det sekulære led på højresiden af (3-204) forsvinder, når

$$\alpha_1 = 0 \quad (3-217)$$

(3-204) antager herved formen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(1)} + 4x^{(1)} &= -A \cos \Psi - A \cos(4t + \Psi) \\ x^{(1)}(0) = \dot{x}^{(1)}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$x^{(1)}(t) = -\frac{A}{4} \cos \Psi (1 - \cos 2t) + \frac{A}{12} (\cos(4t + \Psi) + 2 \sin \Psi \sin 2t - \cos \Psi \cos 2t) \quad (3-218)$$

$\alpha_1 = 0$, (3-203), (3-218) indsættes dernæst på højresiden af (3-195c). Denne antager formen

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(2)} + 4x^{(2)} &= \alpha_2 A \cos(2t + \Psi) + \frac{A}{2} \cos 2t \cdot \\ &\left(\cos \Psi (1 - \cos 2t) - \frac{1}{3} (\cos(4t + \Psi) + 2 \sin \Psi \sin 2t - \cos \Psi \cos 2t) \right) = \\ &-\frac{A}{6} \cos \Psi + A \cos \Psi \left(\alpha_2 + \frac{5}{12} \right) \cos 2t - A \sin \Psi \left(\alpha_2 - \frac{1}{12} \right) \sin 2t \\ &-\frac{A}{6} \cos(4t - \Psi) - \frac{A}{12} \cos(6t + \Psi) \end{aligned} \quad (3-219)$$

De sekulære led på højresiden af (3-219) forsvinder, når

$$1.2.1: \quad \alpha_2 = -\frac{5}{12} \wedge \sin \Psi = 0 \quad (3-220)$$

$$1.2.2: \quad \alpha_2 = \frac{1}{12} \wedge \cos \Psi = 0 \quad (3-221)$$

De tilsvarende grænsekurver følger ved indsætning af (3-217), (3-220), (3-221) i (3-194)

$$\delta = 4 + \frac{5}{12} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \quad (3-222)$$

$$\delta = 4 - \frac{1}{12} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \quad (3-223)$$

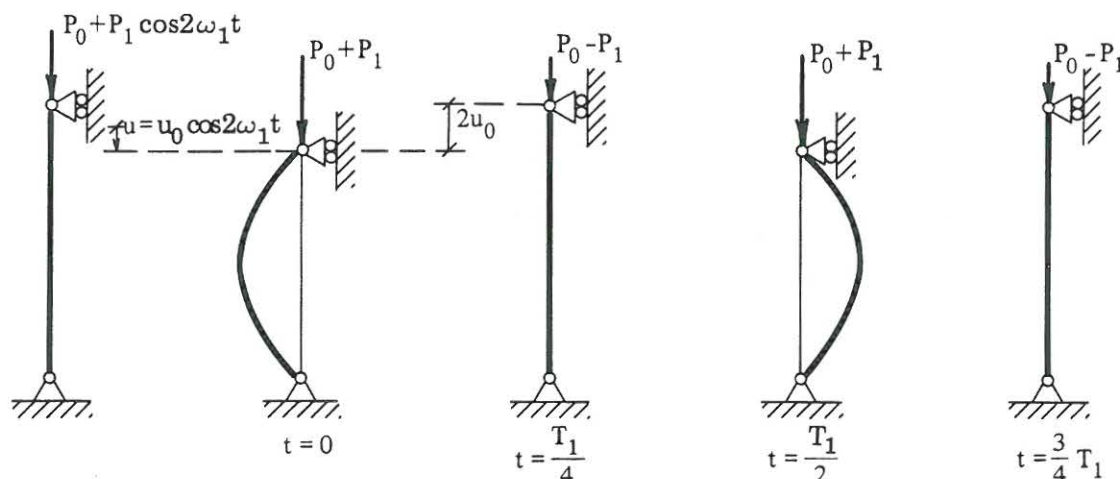
Grænsekurver kan på samme måde opnås for $n = 3, 4, 5, \dots$

2. $\omega \notin \{0, 1, 2, \dots\}$

Der kan føres et bevis for, der ikke eksisterer periodiske løsninger for disse værdier af ω .

De opnåede grænsekurver er vist på Struttdiagrammet, figur 2-15. De skraverede områder repræsenterer kombinationer af (δ, ε) for hvilke systemet er instabilt. Området, der udgår fra $(\delta, \varepsilon) = (m^2, 0)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ betegnes *instabilitetsområdet af m. orden*. Instabilitetsområderne bliver stadigt smallere, når ordenen m vokser. Instabilitetsområderne af 0. og 1. orden er af denne årsag af størst betydning.

Eksempel 3-6: Instabilitetsområder for søjle med tidsvarierende tryknormalkraft.



Figur 3-10: Svingninger af søjler ved 1. instabilitetsområde.

Ved instabilitet i det m . instabilitetsområde er $\delta \simeq m^2$, $m = 1, 2, \dots$. Søjlen i eksempel 3-4 er da dynamisk instabil, uanset størrelsen af amplituden P_1 af den harmonisk varierende trykkraft, når dennes cykliske frekvens ω opfylder betingelsen, se (3-176)

$$m^2 = 4 \frac{\omega_n^2}{\omega^2} \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{2}{m} \omega_n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (3-224)$$

Betragt tilfældet $m = n = 1$. Af (3-176), (3-177) følger

$$\delta = 4 \frac{\omega_1^2}{\omega^2}, \quad \omega_1^2 = \omega_{1,0}^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_E}\right) \quad (3-225)$$

$$\epsilon = -2 \frac{\omega_{1,0}^2}{\omega^2} \frac{P_1}{P_E} \quad (3-226)$$

Her er $\delta \simeq 1 \Rightarrow \omega \simeq 2\omega_1$. At cykliske frekvenser $\omega \simeq 2\omega_1$ er kritiske for søjlens stabilitet kan indses fysisk. Figur 3-10 viser bjælken under egensvingninger med den cykliske egenfrekvens ω_1 . Som følge af bjælkens bøjningsdeformationer, foretager bjælkens endepunkt herved en harmonisk bevægelse i retning af bjælkeaksen med den cykliske frekvens $2\omega_1$, givet ved udtrykket

$$u(t) = u_0 \cos 2\omega_1 t \quad (3-227)$$

Denne flytning er i fase med den tidsvarierende del af tryknormalkraften $P_1 \cos 2\omega_1 t$, der derfor bestandigt udfører et positivt arbejde på systemet.

Af (3-225) følger $P_0 > P_E \Leftrightarrow \delta < 0$. Dette implikerer statisk instabilitet. Ifølge (3-202), (3-225), (3-226) er søjlen ikke desto mindre dynamisk stabil i dette tilfælde, hvis kraftamplituden P_1 opfylder følgende betingelse

$$\frac{1}{2} \epsilon^2 > -\delta \Rightarrow$$

$$\frac{|P_1|}{P_E} > \sqrt{2 \left(\frac{P_0}{P_E} - 1 \right)} \frac{\omega}{\omega_{1,0}} \quad (3-228)$$

Eksempel 3-7: Instabilitetsområder for matematisk pendul med tidsvarierende lodret flytning af understøtningspunktet.

Betragt igen det matematiske pendul i eksempel 3-5.

Den nederste ligevægtstilstand svarende til $\varphi_0 = 0$ er statisk stabil. Af (3-186) og (3-187) følger

$$\delta = 4 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \quad (3-229)$$

$$\varepsilon = 2 \frac{y_0}{l} \quad (3-230)$$

Ved instabilitet i det m . instabilitetsområde er $\delta \simeq m^2$, $m = 1, 2, \dots$. Pendulet er da instabilt i ligevægtspunktet $\varphi_0 = 0$, uanset størrelsen af amplituden y_0 af det harmonisk varierende understøtningspunkt, når dets cykliske frekvens opfylder betingelsen

$$m^2 = 4 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{2}{m} \omega_0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3-231)$$

Det øverste ligevægtspunkt $\varphi_0 = \pi$ er statisk instabilt. Af (3-186) og (3-187) følger

$$\delta = -4 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} < 0 \quad (3-232)$$

$$\varepsilon = -2 \frac{y_0}{l} \quad (3-233)$$

Ifølge (3-202) er den opadvendte ligevægtstilstand herved dynamisk stabil for påvirkningsamplituden y_0 , der opfylder følgende betingelse

$$\frac{1}{2} \varepsilon^2 > -\delta \Rightarrow$$

$$\frac{|y_0|}{l} > \sqrt{2} \frac{\omega_0}{\omega} \quad (3-234)$$

Den anvendte metode kan mere generelt anvendes ved stabilitetsanalyse af variationsligningen (2-28), når denne er kvasiharmonisk. $c_0(t)$ og $k_0(t)$ er her periodiske funktioner med perioden T .

Analogt til (3-175) og (3-185) indføres en dimensionsløs tid τ , defineret ved

$$\tau = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{T} t = \pi \frac{t}{T} \quad (3-235)$$

Herved bliver $c_0 \left(\frac{T}{\pi} \tau \right)$ og $k_0 \left(\frac{T}{\pi} \tau \right)$ periodiske funktioner med perioden π .

Med de gjorte forudsætninger, kan (2-28) skrives på formen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{T}{\pi} c_0 \left(\frac{T}{\pi} \tau \right) \frac{dx}{d\tau} + \left(\frac{T}{\pi} \right)^2 k_0 \left(\frac{T}{\pi} \tau \right) x = 0 \Rightarrow \\ \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \mu \left[2a\omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos 2n\tau + D_n \sin 2n\tau \right] \frac{dx}{d\tau} \\ + \left[\omega_0^2 + \mu \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos 2n\tau + B_n \sin 2n\tau \right] x = 0 \end{aligned} \quad (3-236)$$

hvor

$$2\mu a\omega_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{T}{\pi} c_0 \left(\frac{T}{\pi} \tau \right) d\tau \quad (3-236a)$$

$$\mu C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{T}{\pi} c_0 \left(\frac{T}{\pi} \tau \right) \cos 2n\tau d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3-236b)$$

$$\mu D_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{T}{\pi} c_0 \left(\frac{T}{\pi} \tau \right) \sin 2n\tau d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3-236c)$$

$$\omega_0^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{T}{\pi} \right)^2 k_0 \left(\frac{T}{\pi} \tau \right) d\tau \quad (3-236d)$$

$$\mu A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{T}{\pi} \right)^2 k_0 \left(\frac{T}{\pi} \tau \right) \cos 2n\tau d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3-236e)$$

$$\mu B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{T}{\pi} \right)^2 k_0 \left(\frac{T}{\pi} \tau \right) \sin 2n\tau d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3-236f)$$

Først beregnes $2\mu a\omega_0$, μC_n , μD_n , ω_0^2 , μA_n , μB_n af ovenfor anførte udtryk. Parameteren a vælges frit. Denne er dimensionsløs og af størrelsesorden 1. Herefter beregnes perturbationsparameteren μ af produktet $2\mu a\omega_0$, og til slut beregnes Fourierkoefficienterne A_n , B_n , C_n , D_n af de kendte produkter μA_n , μB_n , μC_n , μD_n .

Mathieu's ligning (3-189) optræder åbenbart som et specialtilfælde af (3-236), hvor $a = 0$, $B_n = C_n = D_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, $A_n = 0$, $n = 2, 3, \dots$.

Parametrene i systemet udgøres nu af $\mu, \zeta = \mu a, \omega_0$ og Fourierkoefficienterne A_n, B_n, C_n, D_n , $n = 1, 2, \dots$. For nogle kombinationer af disse parametre er ligevægtspunktet $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ til (3-236) asymptotisk stabilt, for andre kombinationer af parametrene er ligevægtspunktet instabilt. Grænseflader i $(\mu, \zeta, \omega_0, A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, \dots)$ -rummet fastlægges igen ved, at der eksisterer periodiske løsninger til (3-236).

Periodiske løsninger $x(t)$ til (3-236) og disses ukendte periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ bestemmes atter ved Lindstedt's metode. Løsningerne søges bestemt ved perturbationsrækkerne

$$x(\tau) = x^{(0)}(\tau) + \mu x^{(1)}(\tau) + \mu^2 x^{(2)}(\tau) + \dots \quad (3-237)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \mu \alpha_1 + \mu^2 \alpha_2 + \dots \quad (3-238)$$

i. ordensløsningerne skal bestemmes, så $x^{(i)}(\tau) = x^{(i)}(\tau + \frac{2\pi}{\omega})$, hvilket bestemmer de ukendte parametre $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ i (3-238). α_i afhænger af $\zeta, \omega_0, A_n, B_n, C_n, D_n$, $n = 1, 2, \dots$, men ikke af μ .

Differentialligningssystemet til bestemmelse af $x^{(i)}$ følger nu direkte ved specialisering af (3-24). De søgte grænseflader udgøres endeligt af (3-238).

3.7 Referencer.

- [1] A. Lindstedt. Memoires de l'Academie Impériale de St. Petersburg, Vol. 31, 1883.
- [2] N. Krylov og N. N. Bogoliubov: *Introduktion til ikke-lineær mekanik* (på russisk). Kiev, 1937.
- [3] N. N. Bogoliubov og J. A. Mitropolsky: *Asymptotiske metoder i ikke-lineær svingningsteori*, (på russisk). Moskva, 1948.

4. Emneliste

Nedenfor er anført en liste over de vigtigste emner og definitioner. Der er kun refereret til emnerne, hvor disse første gang indføres i teksten. Endvidere er begreber, til hvilke der henvises i indholdsfortegnelsen, ikke anført.

Amplitudehysteres	91
Asymptotisk orbital stabil trajektorie	25
Asymptotisk stabil bevægelse	24
Autonome systemer	20
Bevægelse	22
Bevægelse i det små	41
Bevægelse i det store	41
Bevægelsesrum	22
Bilineær oscillator	13
Blød fjeder	11
Bouc-Wen hysteres	16
Center	37
Coulomb dæmpning	13
Dissipative systemer	11
Duffing's differentiaalligning	21
Elastiske fjedre	11
Faseplan	21
Faseportræt	21
Faserum	21
Floquet's sætning	48
Forskydningsmodel	5
Fysiske ikke-lineariteter	10
Geometriske ikke-lineariteter	10
Harmonisk amplitudegensvar	86
Hysteresevirkning	11
Hård fjeder	11
Ikke-lineær svingningsteori	1
Indefinit funktion	56
Infinitesimal analyse	27
Instabil bevægelse	24
Instabilitetsområde af m. orden	110
Instabil knude	34
Instabilt focus	37

i. ordens perturbationsløsning	63
Isoleret ligevægtspunkt	22
Kanai-Tajimi filter	6
Karakteristik	22
Karakteristiske eksponenter	48
Karakteristiske multiplikatorer	50
Kombinationsharmonisk gensvar af orden n og m	99
Konservative kræfter	10
Konstant bevægelse	23
Kritisk opførsel af system	29
Kvalitative løsningsmetoder	20
Kvantitative løsningsmetoder	20
Kvasi-harmonisk system	65
Liapunovfunktion	55
Liapunov's 2. metode	55
Liapunov's stabilitetsdefinitioner	24
Liapunov's stabilitetssætninger	57
Ligevægtspunkt	22
Matematisk pendul	40
Mathieu's differentialligning	21
Midlingsmetoden	74
Negativ definit funktion	56
Negativ halvtrajektorie	21
Negativ semidefinit funktion	56
Orbital instabil trajektorie	25
Orbital stabil trajektorie	25
Periode af periodisk bevægelse	23
Periodisk bevægelse	23
Perturbation	23
Perturbationsmetode	64
Perturberet bevægelse	23
Poincaré-Bendixon's sætning	46
Polylineær oscillator	15
Positiv definit funktion	56
Positiv halvtrajektorie	21
Positiv semidefinit funktion	56
Potentiel energi	10
Rayleigh's differentialligning	21
Regulært punkt	22
Routh-Hurwitz kriterium	30

Saddelpunkt	35
Sekulært led	66
Selvinducerede ydre belastninger	9
Separatrix	43
Signifikant opførsel af system	29
Singulært punkt	22
Stabil bevægelse	24
Stabil knude	34
Stabilt focus	37
Strutt diagram	53
Subharmonisk amplitudegensvar	97
Subharmonisk komponent af m. orden	98
Subharmonisk gensvar	91
Svagt ikke-autonomt system	62
Svagt ikke-lineært system	62
Tidsvarierende koefficienter	104
Tilstandsfart	22
Tilstandsrum	21
Tilstandsvariabel	6
Tilstandsvektor	6
Trajektorie	21
Uperturberet bevægelse	23
Uægte knude	35
Van der Pol's differentiaalligning	21
Variationsligningssystem	27
Ægte knude	35

5. SUPPLERENDE LITTERATUR

Af generelle værker, der omhandler alle aspekter af det i denne bog behandlede stof, kan anbefales:

- [1] L. Meirovitch: *Element of Vibration Analysis*. McGraw-Hill, 1975.
- [2] J. J. Stoker: *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*. Interscience Publishers, 1950.
- [3] N. Minorsky: *Non-linear Oscillations*. Van Nostrand, New York, 1974.
- [4] C. Hayashi: *Non-linear Oscillations in Physical Systems*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1964.

Som uddybende litteratur til kapitel 2 kan anbefales:

- [1] N. G. Chetayev: *The Stability of Motion*, Pergamon Press. New York, 1961.

For kapitel 3 kan anbefales:

- [1] A. H. Nayfeh: *Perturbation Methods*. Interscience-Wiley, New York, 1973.
- [2] V. V. Bolotin: *The Dynamic Stability of Elastic Systems*. Holden-Day, San Francisco, 1964.